
2 PROPOSTA METODOLOGICA

2.1 Modello di analisi della performance degli operatori

La valutazione della performance dell'operatore che eroga la dote deve avvenire nel rispetto dei seguenti obiettivi definiti dalla legge L.R. 22/06 e L.R. 19/07: centralità della persona e personalizzazione dei servizi, libertà di scelta e trasparenza del sistema, risultati in termini occupazionali, valorizzazione del capitale umano e valorizzazione del sistema delle imprese. Nel seguito viene illustrata una serie di proposte metodologiche riferite al contesto in esame, mettendone in evidenza le caratteristiche. Viene inoltre illustrato un esempio di queste metodologie.

Nell'ambito dell'approccio proposto, la variabile risposta riflette una serie di caratteristiche peculiari del soggetto a cui viene erogata la dote. Ad esempio, come verrà ampiamente descritto nella Sezione 3 circa le fonti informative nel caso della dote riferita alle donne, tale variabile potrebbe essere lo status occupazionale al termine dell'erogazione della dote, oppure una misura del reddito dei beneficiari.

Come avviene anche in altri contesti di valutazione simili a quello presente, si dispone di più misurazioni sulla stessa variabile risposta. Si dice quindi che i dati hanno una struttura longitudinale. In questo contesto, l'utilizzo dei modelli multilivello nella formulazione a classi latenti rappresenta un valido strumento per poter valutare la performance degli operatori.

Il modello a classi latenti (Lazarsfeld and Henry, 1968) è stato proposto per descrivere come una serie di variabili risposta dipenda da un unico fattore non direttamente osservabile (ad esempio propensione o attitudine verso un certo comportamento). Un'estensione di questo modello è stata recentemente applicata alla valutazione dell'effetto dei corsi di formazione del fondo sociale europeo della regione Lombardia sulla tipologia contrattuale sottoscritta nei periodi successivi al corso; si veda Bartolucci e Pennoni (2009). Il modello trova anche applicazione per trattare dati su più livelli come nel contesto in esame, ricalcando la struttura di modelli multilivello basati su effetti casuali continui (Raudenbush e Bryk, 2002). In questo contesto possiamo vedere gli operatori come unità di primo livello corrispondenti a gruppi di soggetti. Di conseguenza le classi latenti possono essere utilizzate per tener conto di caratteristiche non osservabili che influenzano il comportamento delle unità di primo livello

(operatori) e di secondo livello (beneficiari). Un'estensione di questo approccio ai dati longitudinali è stata recentemente applicata per la valutazione di performance di case di riposo sulla base della salute degli anziani che vi sono ospitati (Bartolucci et al., 2009).

L'approccio che viene qui proposto è teso a valutare come ciascun operatore influenzi il livello delle variabili risposta riferite ai beneficiari che hanno usufruito di tale operatore. Sulla base di questo approccio, in particolare, è possibile ricavare un sistema di punteggi (score) che misurano la performance degli operatori. Questo sistema può essere costruito seguendo una metodologia simile a quella adottata da Bartolucci et al. (2009). Il modello, inoltre, fornisce direttamente una classificazione degli operatori in base alla loro performance ed in particolare per quanto riguarda alla loro efficacia nel migliorare la situazione di ciascun beneficiario. Nel seguito introduciamo il modello statistico su cui si basa l'approccio in questione, trattando, in dettaglio, le sue assunzioni e fornendo un esempio di applicazione.

2.2 Assunzioni del modello statistico

Indichiamo con H il numero degli operatori, con n_h il numero di beneficiari seguiti dall'operatore h e con T il numero di osservazioni disponibili per ogni singolo beneficiario o soggetto, dove $h = 1, \dots, H$, $i = 1, \dots, n$ e $t = 1, \dots, T$. Indichiamo inoltre con Y_{hit} la variabile risposta per il soggetto i seguito dall'operatore h al tempo t o per brevità soggetto hi . Ad esempio, Y_{hit} potrebbe essere il logaritmo del reddito in euro riferito all'anno t .

L'approccio proposto si basa su un modello statistico basato sulla seguente assunzione

$$(1) \quad Y_{hit} = u_{hi} + \mathbf{x}'_{hit}\beta + v_h z_{hit} + \epsilon_{hit}$$

dove u_{hi} rappresenta l'effetto latente riferito al beneficiario hi , \mathbf{x}_{hit} è il vettore delle covariate osservate per lo stesso beneficiario, z_{hit} è una variabile indicatrice che vale 1 se il soggetto è seguito dall'operatore h al tempo t e zero altrimenti, v_h rappresenta l'effetto dell'operatore h su tutti i soggetti che hanno beneficiato di questo operatore. Infine le variabili casuali ϵ_{hit} , che rappresentano termini di errore, sono assunte indipendenti con distribuzione Normale con media 0 e varianza σ^2 . In particolare, u_{hi} è una variabile latente discreta con k punti di supporto corrispondenti a diversi livelli dell'effetto di caratteristiche non osservabili sul comportamento del beneficiario. L'introduzione di queste variabili permette di tener conto dell'eterogeneità tra i

soggetti che non è spiegabile sulla base delle covariate osservabili (*eterogeneità non osservabile*). Analogamente, v_h è una variabile discreta con l punti di supporto che corrispondono a diversi livelli di efficacia dell'operatore. Questi punti di supporto vengono indicati con ξ_1, \dots, ξ_l e sono gli *score* con cui vengono misurate le performance degli operatori (l'utilizzo di questi score sarà illustrato nel seguito). Si hanno quindi l *classi di performance* ognuna corrispondente a un punto di supporto della distribuzione. Inoltre la distribuzione di ogni variabile v_h viene fatta dipendere dalle covariate dell'operatore tramite un modello logistico multinomiale (Agresti, 2002). Questa formulazione prevede che

$$\log \frac{\pi_h(s)}{\pi_h(1)} = \mathbf{w}'_h \gamma, \quad s = 2, \dots, l,$$

dove $\pi_h(s) = p(v_h = \xi_s)$ è la probabilità che l'operatore appartenga alla classe di performance s e \mathbf{w}_h è il vettore di covariate riferite a tale operatore.

In questo lavoro consideriamo anche una formulazione alternativa di come le covariate dell'operatore influenzano le sue performance. In questa seconda formulazione assumiamo che

$$(2) \quad Y_{hit} = u_{hi} + \mathbf{x}'_{hit} \beta + z_{hit} (u_h^* + \mathbf{w}'_h \delta) + \epsilon_{hit},$$

dove u_h^* è una variabile latente della stessa natura di u_i basata su l punti di supporto. Tuttavia, i punti di supporto di questa variabile latente non sono direttamente interpretabili come score da associare agli operatori. Infatti lo score è qui dato dal livello di questa variabile latente a cui va sommato $\mathbf{w}'_h \delta$.

Assumendo che le variabili risposta riferite ai beneficiari siano indipendenti condizionatamente alle covariate e alle variabili latenti la stima di massima verosimiglianza del modello può essere ottenuta tramite l'algoritmo EM (Dempster et al., 1977) sia che si adotti la formulazione (1) o (2). Inoltre, al fine di selezionare il numero di classi latenti ottimali, cioè per scegliere k e l sulla base dei dati osservati, è opportuno utilizzare il Bayesian Information Criterion (BIC, Schwarz, 1978) o l'Akaike Information Criterion (AIC, Akaike, 1973), che sono ampiamente studiati nell'ambito della letteratura statistica su modelli a variabile latenti.

2.3 Valutazione degli operatori

In questa sezione mostriamo come sulla base del modello presentato nella sezione precedente sia possibile costruire un sistema di valutazione degli operatori. In questo ambito la formulazione (1) è di più facile utilizzo e di più immediata interpretazione rispetto alla formulazione (2). Di conseguenza faremo solo riferimento alla prima. Inoltre in questo ambito va valutata con attenzione l'opportunità di inserire le covariate dell'operatore quando viene formulato il modello logistico multinomiale sulle probabilità $\pi_h(s)$. Tale valutazione dipende dall'utilizzo finale che si vuole fare del sistema di score che viene costruito. Ad esempio, inserendo tra le covariate una variabile indicatrice per la tipologia dell'operatore, (ad esempio s.a.s., s.r.l. etc..) si deve essere consapevoli che lo score potrebbe risentire in qualche misura di questa tipologia.

Una volta selezionato e stimato il modello, il sistema di valutazione degli operatori basato sulle probabilità a posteriori che ognuno di questi operatori appartenga ad ognuna delle classi di performance corrispondenti ai punti di supporto della distribuzione delle variabili latenti v_h . Queste probabilità sono indicate con $P(v_h = \xi_s | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$, $h = 1, \dots, H$, $s = 1, \dots, k$, dove $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ rappresentano i dati osservati. Sulla base di queste probabilità è possibile:

- *Assegnare ogni operatore a una determinata classe di performance*: l'operatore h viene assegnato alla classe latente s_i tale che $P(v_h = \xi_s | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$ è massima quando $s = s_i$. Quindi viene assegnato a questo operatore lo score stimato corrispondente, che viene indicato con $\rho_{1h} = \hat{\xi}_{s_i}$. Questo approccio di valutazione è particolarmente interessante quando l'obiettivo è classificare i soggetti in classi omogenee e più che altro quando si è interessati all'ordinamento di queste classi che allo specifico punteggio che viene associato.

A tale proposito è possibile anche utilizzare una misura della qualità della classificazione prodotta che è basata sul seguente indice

$$S = \frac{\sum_{h=1}^H (r_h^* - 1/l)}{H(1-1/l)}$$

dove r_h^* è il valore massimo, rispetto a s , della probabilità a posteriori $P(v_h = \xi_s | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$. L'indice S è sempre compreso tra 0 e 1: quanto è più vicino ad 1 tanto è migliore la qualità della classificazione.

- *Calcolare uno score per ogni operatore:* per ogni operatore è anche possibile calcolare uno score su una scala continua come

$$(3) \quad \rho_{2h} = \sum_s \hat{\xi}_s P(v_h = \xi_s | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$$

e quindi come media ponderata degli score stimati con pesi pari alle probabilità a posteriori. Ne risulta un sistema di pesi unidimensionali per valutare la performance degli operatori in base alla capacità di seguire i beneficiari durante il percorso di erogazione della dote.

Per illustrare i due sistemi di valutazione degli operatori, nel seguito vengono riportati alcuni risultati esemplificativi. In particolare la Tabella 2.1 riporta per ogni operatore le probabilità a posteriori in base al modello selezionato supponendo un certo numero di classi latenti l pari a 3.

OPERATORE	Classe 1	Classe 2	Classe 3
	<i>Scarsa</i> $\hat{\xi}_1 = -2$	<i>Efficacia Intermedia</i> $\hat{\xi}_2 = 0$	<i>Alta</i> $\hat{\xi}_3 = 1$
1	0.21	0.32	0.47
2	0.33	0.65	0.02
3	0.40	0.01	0.59
4	0.12	0.52	0.36
5	0.35	0.26	0.39
6	0.21	0.45	0.34
...
...
...
...
...
H	0.05	0.67	0.28
<i>Probabilità complessive delle classi latenti</i>			
	0.24	0.41	0.34

Tabella 2.1 – Valori stimati dei punti di supporto in base ad un modello con 3 classi latenti, probabilità a posteriori per ogni operatore e probabilità complessive di ogni classe latente.

La tabella riporta anche lo score stimato per ogni classe e la probabilità complessiva stimata. Come si evince, le tre classi latenti possono essere ordinate secondo l'efficacia dell'operatore: la classe 3 comprende gli operatori che hanno avuto la maggiore efficacia per quanto riguarda il cambiamento della condizione occupazionale dei beneficiari in quanto per questa classe si ha il valore maggiore dello score stimato. A seguire la classe 2 raccoglie gli operatori con efficacia intermedia mentre la classe latente 1 raccoglie gli operatori con la minor efficacia. Si nota come il 67% degli operatori ha una performance intermedia, il 24% ha una performance scarsa ed il 34% ha una performance elevata. Tali probabilità a posteriori possono essere adeguatamente rappresentate a livello grafico attraverso la Figura 2.1. Il grafico è ottenuto considerando che ad ogni operatore sono associate tre probabilità a posteriori corrispondenti alla sua probabilità di appartenere alla classe con scarsa, intermedia o alta performance e che tali probabilità per costruzione sommano ad uno.

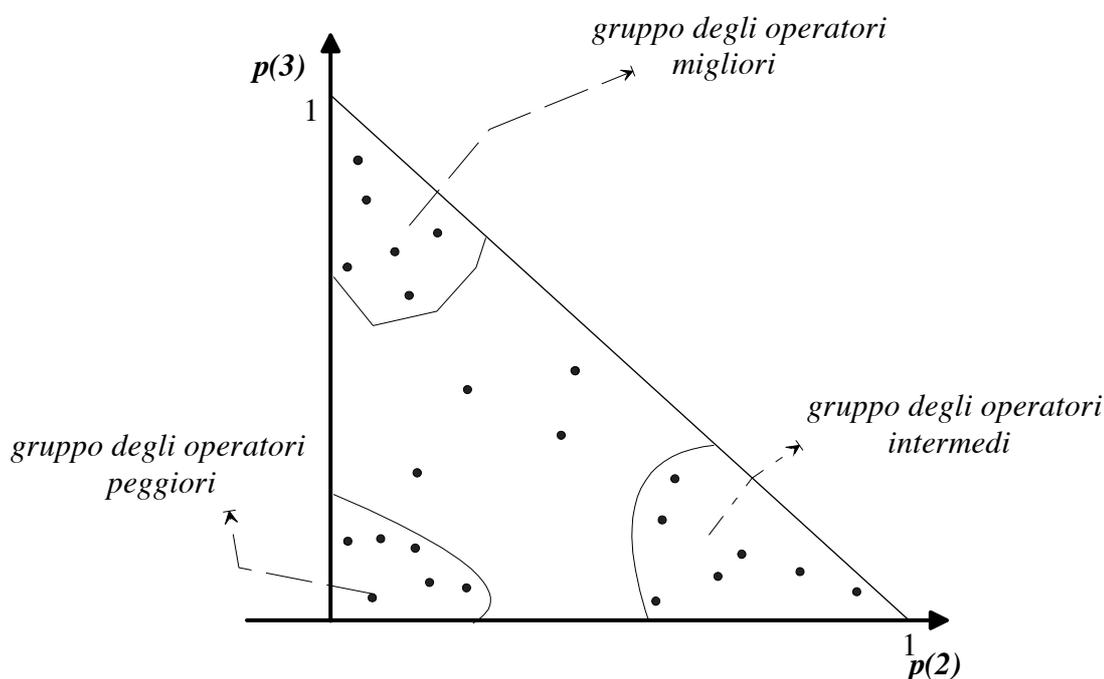


Figura 2.1 –Rappresentazione delle probabilità a posteriori stimato dal modello.

Nella figura sono rappresentate i punti in corrispondenza delle probabilità riferite alle classi latenti 2 e 3. Sono state messe in evidenza tre aree che delimitano i punti del grafico. Gli operatori migliori sono quelli che presentano alti valori delle probabilità a posteriori per la classe latente 3 e bassi valori per le probabilità associate alle classi latenti 1 e 2. Il gruppo di operatori corrispondenti ai punti vicino all'origine è il gruppo di coloro che hanno scarsa performance nei confronti dei soggetti beneficiari della dote, in quanto hanno elevata probabilità di appartenere alla classe 1. Infine, il gruppo degli operatori i cui punti sono collocati in basso a destra è il gruppo degli operatori con performance intermedia, in quanto appartengono con elevata probabilità alla classe 2.

Come detto in precedenza i punti di supporto stimati $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_l$ delle variabili v_h costituiscono uno score unidimensionale. Adottando il criterio di classificazione (3) gli operatori possono pertanto essere ordinati in base allo score unidimensionale ottenuto come media degli score stimati ponderata con le probabilità a posteriori. Gli score sono indicati con ρ_{2h} e riportati nella Tabella 2.2.

OPERATORE		Score Unidimensionale ρ_{2h}			
h	Stima	Errore standard	Estremo inferiore	Estremo superiore	
1	0.26	0.41	-0.54	1.06	
2	-0.31	0.37	-1.03	0.42	
3	0.19	0.52	-0.83	1.20	
4	0.24	0.04	0.16	0.32	
5	0.04	0.45	-0.84	0.92	
6	0.24	0.10	0.04	0.44	
...			
...			
H	0.23	0.11	0.01	0.45	

Tabella 2.2 – Score unidimensionale per ogni operatore h con il corrispondente errore standard e gli estremi dell'intervallo di confidenza al 95%.

La stessa tabella riporta l'errore standard e gli estremi dell'intervallo di confidenza calcolati sulla base di 100 repliche bootstrap in cui viene estratto un campione con ripetizione dal campione originario (Efron e Tibshirani, 1994). Gli errori standard forniscono una misura di precisione dello score; una misura alternativa è fornita dall'ampiezza degli intervalli di confidenza. Con qualche approssimazione, questi intervalli possono essere direttamente utilizzati per capire se gli score associati a due operatori sono significativamente diversi.

Un'adeguata rappresentazione degli score riportati nella Tabella 2.2 può essere ottenuta ordinando gli score in senso crescente e riportando il loro valore insieme a quello dell'estremo superiore ed inferiore dell'intervallo di confidenza al 95%. La Figura 2.2 illustra l'ordinamento degli operatori ottenuto dalla (3). Dalla figura si osserva che gli intervalli hanno ampiezza simile

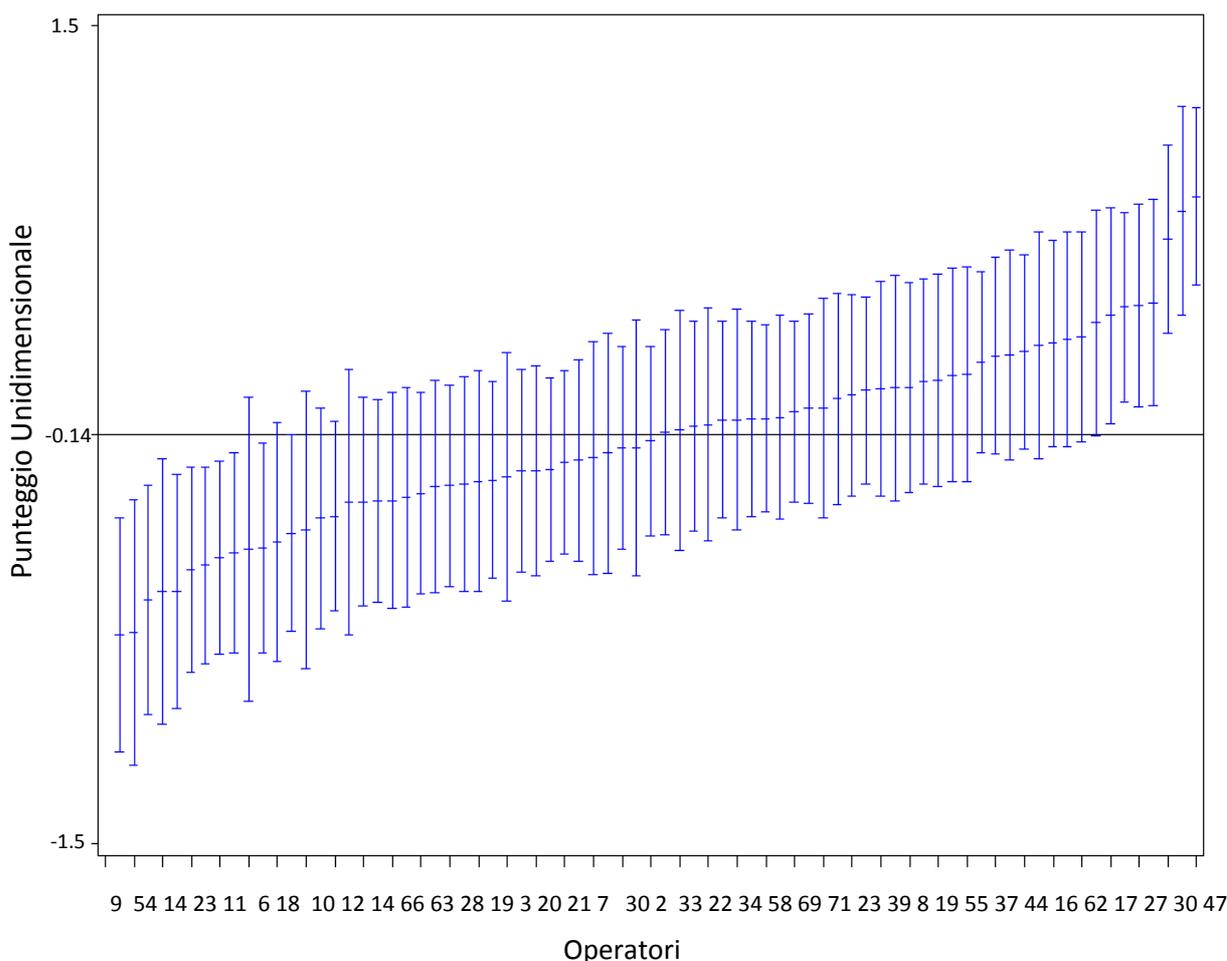


Figura 2.2–Intervallo di confidenza al 95% per ogni punteggio unidimensionale ρ_{2h} .

fatta eccezione per alcuni che invece presentano un intervallo di confidenza particolarmente ampio denotando una minore precisione di stima. Il punteggio medio è pari a -0.14 ed è calcolato come media degli score stimati ponderati con le probabilità complessive delle classi latenti. Dal grafico si nota che vi è un gruppo di operatori il cui punteggio è notevolmente inferiore alla media (in basso a sinistra) ed un gruppo il cui punteggio è notevolmente superiore alla media (in alto a destra).

Riferimenti bibliografici

Agresti A. (2002). *Categorical Data Analysis*, 2nd Edition. Canada: Wiley.

Akaike, H. (1973). Information theory as an extension of the maximum likelihood principle. In Petrov, B. N. and F., C., editors, *Second International symposium on information theory*, pages 267-281, Budapest, Akademiai Kiado.

Bartolucci, F., Lupparelli, M., and Montanari, G. E. (2009). Latent Markov model for binary longitudinal data: an application to the performance evaluation of nursing homes. *Annals of Applied Statistics*, 3, 611-636.

Bartolucci e Pennoni (2009). Impact evaluation of job training programs by a latent variable model, (Sottoposto).

Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 39, 1–38.

Bradley Efron; Robert Tibshirani (1994). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC

Lazarsfeld, P. F. and Henry, N. W. (1968). *Latent Structure Analysis*. Boston: Houghton Mifflin.

Raudenbush, S. W. and Bryk, A. S. (2002). *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods* (Second Edition). Newbury Park: Sage Publications.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6, 461-464.