# QUADERNI DI STATISTICA E MATEMATICA APPLICATA ALLE SCIENZE ECONOMICO - SOCIALI

VOLUME I - N. 2 - OTTOBRE 1978

FACOLTA' DI ECONOMIA E COMMERCIO
DIPARTIMENTO DI METODI QUANTITATIVI

LIBERA UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO

Quaderni di Statistica e Matematica
applicata alle Scienze Economico-Sociali
VOLUME I — N. 2 — OTTOBRE 1978

# STIMA DELLA MATRICE DI TRANSIZIONE DA DUE O PIU' FONTI DI INFORMAZIONE

di Angiola POLLASTRI *

## 1. *Introduzione*

Il problema della stima della matrice di transizione nelle catene di Markov a probabilità di transizione costanti è stato ampiamente trattato dalla letteratura nel caso in cui i dati siano di stock o di flusso. Si hanno dati di stock quando in certi istanti di tempo separati da un periodo costante si osserva lo stato di appartenenza degli elementi di un campione. Ad ogni istante il campione viene rinnovato e pertanto si conosce solo una stima della composizione degli stati. Si hanno dati di flusso se lo stesso campione di individui viene osservato in due o più istanti separati da un periodo fisso di tempo e perciò si è in grado di confrontare gli stati che occupano le persone appartenenti al campione in due o più istanti contigui.
A volte, oltre ai dati di stock o di flusso, si posseggono altre informazioni sulla matrice di transizione che possono essere proficuramente utilizzate al fine di ottenere una stima migliore.
Lo scopo di questo lavoro è quello di esaminare la natura delle informazioni che più comunemente si possono avere a disposizione nella analisi di fenomeni socio-economici descrivibili col modello delle catene di Markov e di indicare quale stimatore è opportuno utilizzare in ogni situazione. Si analizzeranno i casi in cui, oltre ai dati di stock o di flusso, si conoscano vincoli lineari sulle probabilità di transizione e il caso in cui, oltre ad una serie completa di dati di stock, si posseggano alcune informazioni campionarie sui dati di flusso.

## 2. *Le fonti di informazione*

Si supponga di studiare un fenomeno per il quale valgono i presupposti delle catene di Markov, ossia che assume r modalità chiamate stati e che la probabilità che assuma lo stato j al tempo t dipende soltanto dal fatto che al tempo $(t-1)$ il fenomeno si trovava in i. Tale probabilità, che assumeremo costante nel tempo, verrà indicata con $p_{ij}$, e viene chiamata probabilità di transizione. Per quanto sopra, vale la relazione:

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t-1)\, p_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

dove $p_j(t)$ è la probabilità che il fenomeno assuma lo stato j al tempo t.
In genere le probabilità di transizione sono ignote e pertanto il ricercatore deve stimarle. Lo stimatore che conviene utilizzare dipende soprattutto dalla

* Libera Università degli Studi di Trento - Facoltà di Economia e Commercio

natura delle informazioni a disposizione. Si esaminano ora i casi più comuni di tipi di informazione e si dà un accenno ai possibili metodi di stima.

a) *Dati di stock.*

Si eseguono campioni indipendenti di $n(t)$ elementi ($t = 0, 1, \ldots, u$) in $(u + 1)$ periodi di tempo e si stima, relativamente ad ogni periodo t, la proporzione di individui che si trovano nel j — mo stato indicata con $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, r$).

Se si hanno a disposizione solo questi dati, per stimare le probabilità di transizione si può usare il metodo di massima verosimiglianza brevemente esposto al § 3.1. Altri metodi di stima sono spiegati in [4].

b) *Dati di stock e vincoli fissi.*

Si conoscono alcune relazioni che legano fra di loro le probabilità di transizione e si hanno dati di stock.

Se i vincoli sono lineari, per la stima delle probabilità di transizione si può ricorrere al metodo della massima verosimiglianza con vincoli fissi esposto al § 3.2. Per chiarire il significato dei vincoli si vedano i due esempi seguenti.

*Esempio 1.*

Il modello ipotizza delle relazioni che legano fra di loro le probabilità di transizione. Se gli stati rappresentano le classi frequentate in un sistema scolastico, deve necessariamente essere $p_{ij} = 0$, per $j < i$ poiché un individuo non può passare ad una classe inferiore.

*Esempio 2.*

Si conoscono dati censuari di alcune probabilità di transizione o di una combinazione lineare di esse. Si possono stimare le probabilità di transizione dai dati di stock e poi aggiustare le stime così ottenute in modo che soddisfino i dati censuari.

c) *Dati di flusso.*

Si eseguono campioni di $n(t)$ elementi in $(u + 1)$ periodi di tempo e si lascia invariato il campione per almeno due rilevazioni consecutive. Si può perciò ottenere il numero di persone appartenenti al campione che si trovano nello stato i al tempo $(t - 1)$ e nello stato j al tempo t che viene indicato con $n_{ij}(t)$.

In questo caso, per effettuare le stime della matrice di transizione, si adopera il metodo della massima verosimiglianza esposto al § 4.1. Come esempio di applicazione di tale metodo si veda in [3] lo studio della mobilità terriera.

d) *Dati di flusso e vincoli fissi.*

Si conoscono delle relazioni lineari sulle probabilità di transizione come negli esempi del punto b) e si hanno dati di flusso. Si procede allora come verrà spiegato al § 4.2.

e) *Dati di stock e dati parziali di flusso.*

Oltre ai dati di stock, si hanno dati campionari su combinazioni lineari delle probabilità di transizione. Il metodo di stima è quello di massima verosimiglianza che tiene conto della contemporanea disponibilità di dati di stock e di alcuni dati di flusso e che verrà trattato al § 5. Se si possiede una stima di tutte le probabilità di transizione si potrebbe anche usare il metodo bayesiano. Per la sua trattazione si rimanda a [4].

*Esempio 1.*

Si conosce una stima della matrice di transizione e si vuol suddividere qualche stato in due o più sottostati e poi stimare la relativa matrice di transizione. Si conoscono altresì i dati di stock sul numero allargato di stati relativamente ad un certo numero di periodi. Questo esempio verrà svolto ampiamente nel § 5.

## 3. *Stima di massima verosimiglianza da dati di stock*

Il caso che porta a stime meno precise è quando si conoscono soltanto stime della composizione degli stati per un certo numero di periodi. Si esamina il modo per procedere alla stima sia nel caso in cui non si hanno altre informazioni aggiuntive sia quando si conoscono vincoli lineari sulle probabilità di transizione.

### 3.1. *Dati di stock senza vincoli*

Se si hanno a disposizione i dati di stock per $(u + 1)$ (maggiore di $r (r - 1)$ ) periodi di tempo, si può procedere, come verrà qui di seguito indicato, ad una stima col metodo della massima verosimiglianza delle probabilità di transizione.

La stima delle prime $(r - 1)$ colonne della matrice di transizione sono date da:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{X}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}) \qquad (2)$$

dove:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{11} \\ \hat{p}_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{r1} \\ \hat{p}_{12} \\ \hat{p}_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{1\,r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{r\,r-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1(1) \\ \hat{p}_1(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_1(u) \\ \hat{p}_2(1) \\ \hat{p}_2(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{r-1}(1) \\ \hat{p}_{r-1}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{p}_{r-1}(u) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{X}_{r-1} \end{bmatrix}$$

in cui ogni blocco diagonale è dato da:

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \hat{p}_1(0) & \hat{p}_2(0) & \cdots & \hat{p}_r(0) \\ \hat{p}_1(1) & \hat{p}_2(1) & \cdots & \hat{p}_r(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{p}_1(u-1) & \hat{p}_2(u-1) & \cdots & \hat{p}_r(u-1) \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \ldots, r-1$$

e $\mathbf{0}$ sono matrici di ordine $u \times r$ con elementi tutti pari a 0.
$\boldsymbol{\Sigma}$ è la matrice di varianze e covarianze delle $p_i(t)$. Esse sono date da:

$$\mathrm{Var}\,(p_i(t)) = \frac{p_i(t)\;(1-p_i(t))}{n(t)} \tag{3}$$

$$\mathrm{Cov}\,(p_i(t), p_j(t)) = \frac{-\,p_i(t) \cdot p_j(t)}{n(t)} \tag{4}$$

Le stime $\hat{\mathbf{p}}$ così ottenute sono non distorte. Se qualcuna delle stime $\hat{p}_{ij}$ risulta essere maggiore di 1 o minore di 0, bisogna ricorrere alla massimizzazione vincolata ( [4], [5] ).

La matrice di varianze e covarianze di $\hat{\mathbf{p}}$ è data da:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{X}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \tag{5}$$

Le stime degli elementi dell'ultima colonna della matrice di transizione si ottengono poi per differenza:

$$\hat{p}_{ir} = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} \hat{p}_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

La stima dell'ultima colonna della matrice di transizione si può indicare con

$$\hat{\mathbf{p}}_r = (\hat{p}_{1r}, \hat{p}_{2r}, \ldots, \hat{p}_{rr})' . \tag{7}$$

L'insieme delle stime $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{p}}_r$, una volta riordinati gli elementi, fornisce la stima di massima verosimiglianza della matrice di transizione.

### 3.2. *Dati di stock con vincoli lineari*

Può a volte accadere di studiare un fenomeno del quale si conoscano in precedenza, oltre ai dati di stock, i valori delle combinazioni lineari di alcune probabilità di transizione. Si stimano allora le probabilità di transizione dai dati di stock tramite la (2) e si aggiustano poi le stime in modo che soddisfino le combinazioni lineari note.

Si pongono i vincoli lineari noti su $\mathbf{p}$ nella seguente forma:

$$\mathbf{G}\,\mathbf{p} = \mathbf{h} \tag{8}$$

dove $\mathbf{G}$ è la matrice dei vincoli di dimensione $k \times r\,(r-1)$, con $k \leqslant r\,(r-1)$, ed il vettore $\mathbf{h}$ è di dimensioni $k \times 1$ ed ha per elementi costanti note. I suddetti vincoli lineari devono essere fra di loro linearmente indipendenti e pertanto vanno scartati quelli fra di loro ridondanti.

La stima di massima verosimiglianza che soddisfa i vincoli noti (8) è data da [6] :

$$\hat{\mathbf{p}}^* = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{V}\,\mathbf{G}'\,(\mathbf{G}\,\mathbf{V}\,\mathbf{G}')^{-1}\,(\mathbf{G}\,\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{h}) \tag{9}$$

Se le stime così ottenute non soddisfano al vincolo di essere comprese fra 0 ed 1, bisogna ricorrere alla massimizzazione vincolata.
La matrice di varianze e covarianze di $\hat{\mathbf{p}}^*$ è data da:

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}^*) = [\mathbf{V} - \mathbf{V}\,\mathbf{G}'\,(\mathbf{G}\,\mathbf{V}\,\mathbf{G}')^{-1}\,\mathbf{G}\,\mathbf{V}] \tag{10}$$

Le stime dell'ultima colonna della matrice di transizione si ottengono dalla (6).

Il miglioramento dell'efficienza che si ottiene considerando anche i vincoli fissi rispetto alle stime da soli dati di stock dipende dal fatto che la matrice:

$$\mathbf{V}\,\mathbf{G}'\,(\mathbf{G}\,\mathbf{V}\,\mathbf{G}')^{-1}\,\mathbf{G}\,\mathbf{V} \tag{11}$$

è semidefinita positiva.

## 4. *Stime di massima verosimiglianza da dati di flusso*

Se si può lasciare invariato il campione per almeno due periodi consecutivi, si è in grado di giungere alla stima del numero di unità che si trovano in i al tempo $(t-1)$ ed in j al tempo t che abbiamo chiamato $n_{ij}(t)$. Qui di seguito si esamina il metodo di stima per questo tipo di dati e per il caso in cui si conoscano anche delle relazioni lineari sulle probabilità di transizione.

### 4.1. *Dati di flusso senza vincoli*

È noto che ( [1] ) se si conoscono i dati di flusso per $(u+1)$ periodi $(u+1 \geqslant 1)$, le probabilità di transizione vengono stimate col metodo della massima verosimiglianza da:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=0}^{u} n_{ij}(t)}{n_i(t)} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, r \tag{12}$$

dove $n_i(t)$ è il numero di individui nello stato i al tempo t.
È inoltre noto che:

$$\operatorname{Var}(\hat{p}_{ij}) = \frac{p_{ij}(1-p_{ij})}{n_i(t)} \tag{13}$$

e

$$\operatorname{Cov}(\hat{p}_{ij}, \hat{p}_{hi}) = \frac{-p_{ij}\, p_{hi}}{n_i(t)} \tag{14}$$

e

$$\operatorname{Cov}(\hat{p}_{li}, \hat{p}_{mj}) = 0, \qquad (i, j, l, m, = 1, 2, \ldots, r, l \neq m) \tag{15}$$

### 4.2. *Dati di flusso con vincoli lineari*

Se, oltre ad avere i dati di flusso suddetti, si hanno dati censuari sulle probabilità di transizione o si hanno informazioni sul valore di combinazioni lineari di due o più probabilità di transizione, può essere auspicabile fare in modo di tenere in considerazione queste ulteriori informazioni.

Si procede analogamente a quando si hanno dati di stock. La stima di massima verosimiglianza è data, cioè, dalla (9) dove $\hat{\mathbf{p}}$ ha per elementi le stime ottenute dalla (12) opportunamente ordinate e $\mathbf{V}$ ha per elementi le varianze (13) e le covarianze (14) e (15).

## 5. *Stime di massima verosimiglianza da dati di stock e da informazioni sui dati di flusso*

Può accadere che, oltre ad essere a conoscenza dei dati di stock, ossia delle stime di $p_j(t)$, $t = 0, 1, \dots, u$, $j = 0, 1, \dots, r$, si conoscano dati campionari di flusso o di combinazioni lineari degli stessi. Si deve tenere presente che i due tipi di informazione suddetti si possono considerare congiuntamente ai fini della stima della matrice di transizione solo se la definizione degli stati è la stessa nei due tipi di rilevazione.

Il metodo di stima ci viene suggerito da Theil ( [6], pag. 347) e viene chiamato stima mista. Si tratta di stimare $\mathbf{p}$ dai dati di stock:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\,\mathbf{p} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{16}$$

(dove $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{O}$ e $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Sigma}$, essendo $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice di varianze e covarianze definita nel § 3.1.) e dalle informazioni sui dati di flusso che possono essere scritte nel seguente modo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\,\mathbf{p} + \mathbf{v} \tag{17}$$

dove $E(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ e $E(\mathbf{v}\mathbf{v}') = \mathbf{W}$, dove $\mathbf{W}$ è la matrice di varianze e covarianze di $\mathbf{v}$, $\mathbf{R}$ è una matrice $k \times r(r-1)$ di rango $k$ ed $\mathbf{r}$ è un vettore di dimensione $k \times 1$.

Combinando i due tipi di informazione, sotto l'ipotesi che siano fra di loro indipendenti, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{p} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \tag{18}$$

con

$$E \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{o} \qquad \text{e Var} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

Essendo la Var $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ una matrice a blocchi diagonali, la sua inversa è data da:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}$$

Lo stimatore lineare efficiente di $\mathbf{p}$ dati $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{R}$ per il modello (18) è

$$\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1}\ (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{r}) \tag{19}$$

e come matrice di varianze e covarianze di $\bar{\mathbf{p}}$ si usa:

$$(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1} \tag{20}$$

$\tilde{\mathbf{p}}$ è uno stimatore lineare più efficiente di $\hat{\mathbf{p}}$ essendo la matrice

$$\mathbf{R}'\,\mathbf{W}^{-1}\,\mathbf{R}$$

che compare nella (20), semidefinita positiva.
Nel caso in cui la (17) può essere partizionata in gruppi fra di loro indidenpenti ed indipendenti dalla (16):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_1\,\mathbf{p} + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_2\,\mathbf{p} + \mathbf{v}_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{R}_s\,\mathbf{p} + \mathbf{v}_s \end{aligned} \tag{21}$$

dove $\mathrm{E}(\mathbf{v}_i) = 0$ e $\mathbf{E}(\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_i') = \mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\mathrm{E}(\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_j') = \mathbf{O}$ per $i \neq j$, lo stimatore lineare ed efficiente di $\mathbf{p}$ dati $\mathbf{X}, \mathbf{R}_1, \ldots \mathbf{R}_s$, è :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}^+ \;=\; & (\mathbf{X}'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{X} + \mathbf{R}_1'\,\mathbf{W}_1^{-1}\,\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_s'\,\mathbf{W}_s^{-1}\,\mathbf{R}_s)^{-1}\,\cdot \\ & \cdot\,(\mathbf{X}'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{y} + \mathbf{R}_1'\,\mathbf{W}_1^{-1}\,\mathbf{r}_1 + \ldots\, \mathbf{R}_s'\,\mathbf{W}_s^{-1}\,\mathbf{r}_s) \end{aligned} \tag{22}$$

e la matrice di varianze e covarianze di $\mathbf{p}$ è :

$$(\mathbf{X}'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{X} + \mathbf{R}_1'\,\mathbf{W}_1^{-1}\,\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_s'\,\mathbf{W}_s^{-1}\,\mathbf{R}_s)^{-1} \tag{23}$$

La ((22) e la (23) sono semplificazioni della (19) e della (20) quando alcuni gruppi di informazioni sono indipendenti da altri.

Bisogna sottolineare il fatto che $\tilde{\mathbf{p}}$ e $\tilde{\mathbf{p}}^+$ devono avere elementi compresi tra 0 ed 1 altrimenti bisogna procedere alla massimizzazione vincolata col metodo della programmazione quadratica.

Le stime dell'ultima colonna della matrice di transizione si ottengono, come nel § 3.1, dalla (6).

*Esemplificazione*

Si è detto nell'introduzione che il metodo di stima di massima verosimiglianza da dati di stock e da informazioni sui dati di flusso può, ad esempio, essere usato quando si conosce la stima di una matrice di transizione con un numero ridotto di stati. Si cercherà di chiarire meglio quanto sopra con un esempio.

Si supponga di avere una stima da dati di flusso della seguente matrice di transizione:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Si voglia suddividere lo stato 3 in due stati, che chiameremo a e b, per studiare in dettaglio il fenomeno in esame. La nuova matrice di transizione è la seguente:

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{1a} & p'_{1b} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{2a} & p'_{2b} \\ p'_{a1} & p'_{a2} & p'_{aa} & p'_{ab} \\ p'_{b1} & p'_{b2} & p'_{ba} & p'_{bb} \end{bmatrix}$$

Nel dividere lo stato 3 in due stati bisogna tenere presente che non sempre la funzione di una catena di Markov gode ancora delle proprietà markoviane. Si veda in proposito [2]. Qualora le caratteristiche delle catene di Markov vengono preservate, si osservino le relazioni esistenti fra gli elementi della matrice $\mathbf{P}$ e della matrice $\mathbf{P}'$ :

$$\begin{aligned}
p_{11} &= p'_{11} \\
p_{21} &= p'_{21} \\
p_{31} &= [p'_{a1}\, p_a(t) + p'_{b1}\, p_b(t)] / p_3(t) \qquad\qquad (24) \\
p_{12} &= p'_{12} \\
p_{22} &= p'_{22} \\
p_{23} &= p'_{2a} + p'_{2b} \\
p_{13} &= p'_{1a} + p'_{1b} \\
p_{32} &= [p'_{a2}\, p_a(t) + p'_{b2}\, p_b(t)] / p_3(t) \\
p_{33} &= [p'_{aa}\, p_a(t) + p'_{ab}\, p_b(t) + p'_{ba}\, p_b(t) + p'_{bb}\, p_b(t)] / p_3(t)\,.
\end{aligned}$$

La settima equazione delle (24) è equivalente alla prima ed alla quarta, la sesta è equivalente alla seconda ed alla quinta mentre la nona equazione è equivalente alla terza ed alla ottava. Si sono pertanto eliminate la sesta, la settima e la nona equazione perché ridondanti.

Se, oltre alla stima della matrice $\mathbf{P}$ da dati di flusso, si hanno dati di stock per gli stati 1, 2, a e b relativamente ad alcuni periodi di tempo, per stimare la matrice $\mathbf{P}'$ si può ricorrere alla stima di massima verosimiglianza con dati misti.

La relazione (17), nell'esempio in esame, risulta essere:

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_a(t)}{p_3(t)} & \frac{p_b(t)}{p_3(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_a(t)}{p_3(t)} & 0 & 0 & \frac{p_b(t)}{p_3(t)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_{11} \\ p'_{21} \\ p'_{a1} \\ p'_{b1} \\ p'_{12} \\ p'_{22} \\ p'_{a2} \\ p'_{b2} \\ p'_{1a} \\ p'_{2a} \\ p'_{aa} \\ p'_{ba} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Ricordando le relazioni (13), (14) e (15), si può giungere ad una stima della matrice di varianze e covarianze di **v**. Nell'esempio in esame essa è:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(1-p_{11})}{n_1(t)} & 0 & 0 & \frac{-p_{11}\,p_{12}}{n_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_{21}(1-p_{21})}{n_2(t)} & 0 & 0 & \frac{-p_{21}\,p_{22}}{n_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_{31}(1-p_{31})}{n_3(t)} & 0 & 0 & \frac{-p_{31}\,p_{32}}{n_3(t)} \\ \frac{-p_{11}\,p_{12}}{n_1(t)} & 0 & 0 & \frac{p_{12}(1-p_{12})}{n_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p_{21}\,p_{22}}{n_2(t)} & 0 & 0 & \frac{p_{22}(1-p_{22})}{n_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p_{31}\,p_{32}}{n_3(t)} & 0 & 0 & \frac{p_{32}(1-p_{32})}{n_3(t)} \end{bmatrix}$$

Si è pertanto in grado di giungere alla stima di **P'** attraverso la (19) e la (6).

## BIBLIOGRAFIA

[1] BARTHOLOMEW D. J., The analysis of Data arising from Stochastic Processes, *The analysis of Survey Data*, edited by O'Muircheartaigh C. A. e Payne C., Vol. II, John Wiley & Sons, 1977.

[2] BURKE C. J. e ROSEMBLATT M., A Markovian function of a Markov Chain, *Annals of mathematical Statistics*, 1958.

[3] DABONI L. e PRESTAMBURGO M., Un modello stocastico per lo studio della mobilità terriera, *Giornale degli economisti e annali di economia*, 1969.

[4] LEE T. G., JUDGE G. G., ZELLNER A., *Estimating the parameters of the Markov Probability model from aggregate time series data*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

[5] POLLASTRI A., La stima della matrice di transizione nell'analisi della mobilità delle forze di lavoro in Italia, *Rivista di Statistica applicata*, Vol. 9, 1976.

[6] THEIL H., *Principles of Econometrics*, John Wiley & Sons, 1971.

## RÉSUMÉ

Dans cet article on prend en examen la nature des informations qu'on peut avoir à disposition dans l'analyse des phénomènes économiques et sociales représentables avec les chaînes de Markov et on indique l'estimateur le plus convenable à chaque situation.

On analyse en particulier les situations où, outre les données de stock ou de flux (situations déjà traitè dans la littérature) on connait des contraintes linéaires sur les probabilités de transition et quand on possède non seulment une série complète de données de stock mais aussi quelques informations sur les données de flux.

## SUMMARY

In this paper the nature of the informations available for the analysis of social and economic phenomena describable by Markov Chains is examined and the estimators suitable for each different situation are indicated.

The cases in which, in addition to stock data or flows data (cases already treated by the literature), linear constraints are known and in which, besides a complete series of stock data, some informations about flows data are available, are particularly treated.