Università di Milano–Bicocca
Quaderni di Matematica

Richiami di Matematica
Esercizi e quesiti a risposta multipla

B. Bacchelli, M. Di Natale, M. Mauri

Quaderno n. 13/2010

Stampato nel mese di giugno 2010
presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università degli Studi di Milano-Bicocca, via R. Cozzi 53, 20125 Milano, ITALIA.

Disponibile in formato elettronico sul sito www.matapp.unimib.it.
Segreteria di redazione: Francesca Tranquillo - Giuseppina Cogliandro
tel.: +39 02 6448 5755-5758 fax: +39 02 6448 5705

RICHIAMI DI MATEMATICA

Esercizi e quesiti a risposta multipla

B.Bacchelli*, M. Di Natale*, M. Mauri*

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano Bicocca, Via Roberto Cozzi 53, 20125 Milano

Indice

Esercizi

Test

ESERCIZI 1. - Logica e insiemi

Proposizioni - Valore di verità
$\neg E, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \subset \cap, \cup, \setminus, \in, \forall, \exists, \varnothing, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

1. Stabilire se le seguenti sono proposizioni, e nel caso affermativo se ne attribuisca il valore di verità.
a) $3 \neq \frac{1}{2} + 2$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$
c) $\sqrt{-4} = 2$
d) $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$
e) *Il numero* $\sqrt{x}$ *è reale.*
f) $x^2 - 2x + 1 = 0$ *per* $x = 1$.
g) $3\sqrt{x} + 5x = 54$.
h) *La equazione* $x(x+1) = 0$ *è equivalente alla* $x + 1 = 0$.
i) *Se* $x > 1 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.
l) *La somma degli angoli interni ad ogni triangolo è pari a* $180°$.
m) *La piramide è una figura di rotazione.*
n) *La mela è buona.*
o) $0.23 = \frac{23}{10}$
p) *Il numero 17 è primo.*
q) *Il numero 13 porta fortuna.*
r) *La equazione* $x + 3 = 0$ *è di secondo grado.*
s) *Ogni equazione algebrica di grado dispari ha almeno una soluzione reale.*
t) $\{x \in \mathbb{R} \; | x^2 \leq 0\} \neq \varnothing$.
u) $\{x \in \mathbb{R} \; | x^2 < 0\} \neq \varnothing$.

2. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Si determini $C = A \cup B$ e $D = A \cap B$.

3. Dati gli enunciati: "*n è un multiplo di 4 o è un numero dispari, e inoltre è minore di 25*" ; " *n è un numero dispari minore di 25, oppure è multiplo di 4 e minore di 25*" (n è un numero naturale), osservare che i due enunciati sono equivalenti e descriverli con espressioni insiemistiche.

4. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

5. Assegnata l'equazione

$$(x-1)(x-4) = 0,$$

si stabilisca se le seguenti sono vere:
Le soluzioni soddisfano la condizione $(x < 2) \vee (x > 3)$.
Le soluzioni soddisfano la condizione $(x < 5) \wedge (x \geq 1)$.

6. Siano $A = \{\text{numeri primi}\}$, $B = \{\text{numeri pari}\}$, $C = \{\text{numeri dispari}\}$, $D = \{5, 20, 15\}$, $a = 5$. Dire se sono vere o false le seguenti proposizioni:
a) $a\in A \cap C$
b) $A\diagdown B = A$
c) $D \cap A = a$
d) $B \cap C \neq \varnothing$
e) $B \cap C \subset A$
f) $C \subset A$
g) *"Gli elementi di D sono multipli di 5."*

7. Siano dati i seguenti insiemi:
$A = \{quadrilateri\}$, R=$\{rettangoli\}$, $M = \{rombi\}$,
$P = \{parallelogrammi\}$, $Q = \{quadrati\}$;
a) si rappresentino gli insiemi in un diagramma di Eulero-Venn;
b) stabilire se le seguenti relazioni sono vere o false:
i) $Q \subset P$
ii) $P \subset R$
iii) $R \cap M = Q$

8. a) Utilizzare la frase "*condizione necessaria affinchè*" nel descrivere la proposizione $E \Rightarrow D$.
b) Utilizzare la frase "*condizione sufficiente affinchè*" nel descrivere la proposizione $D \Rightarrow E$.

9. Descrivere l'ipotesi e la tesi, collegandole col simbolo $\Rightarrow$ per le seguenti proposizioni, essendo A un poligono. Stabilire poi se sono vere e nel caso siano false fornire un controesempio.
Condizione necessaria affinchè A sia un quadrato è che abbia tutti angoli retti.
Condizione sufficiente affinchè A sia un quadrato è che abbia quattro angoli retti.
Condizione sufficiente affinchè A sia un poligono regolare è che sia inscrivibile in una circonferenza.
Condizione necessaria affinchè A sia un quadrato è che sia inscrivibile in una circonferenza.

10. Si determini la proposizone negazione ($\urcorner P$) di ciascuna proposizione seguente P, essendo x un numero reale.
a) $x + 1 > 0$
b) $2x + 3 = 0$
c) *La temperatura supera i 38°.*
d) *Tutti i cavalli sono bianchi.*
e) *Esiste un ombrello nero.*
f) *Tutti i venerdì non gioco a pallone.*

11. Si determini la proposizone negazione ($\urcorner P$) della seguente P:

"Ogni numero naturale maggiore di 1 è somma di due numeri dispari." e si stabilisca se vera o falsa.

12. Dare la definizione di *multiplo*, *divisore, opposto, inverso (reciproco)* di un numero reale, facendo uso della doppia freccia.

13. Dimostrare per assurdo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

14. Determinare per quali a, b reali la condizione: $[\ |a| + |b| = |a + b|\ ]$ è vera.

15. Nelle seguenti proposizioni completare col quantificatore esistenziale ($\exists$) o universale ($\forall$) in modo che risultino vere.

a)(x) $\left[\sqrt{x^2} \geq 0\right]$
b)(x) $[x^2 > 0]$
c)(x) $[2x^2 + 3 > 0]$
d)(x) $[x^2 - 4 > 0]$
e)(n) [*Il numero 2n+1 è primo.*]
f)(a) [$acz + bcz$ *è un monomio.*]
g)(a) [$ax^2 + bx + c$ *è un polinomio di primo grado.*]
h)(b) [$z^2 - bz + b^2$ *è un polinomio di secondo grado.*]
i)(x) $\left[\textit{La frazione } \dfrac{1}{x^2 - 1} \textit{ esiste.}\right]$
l)(T) [*Un trapezio* (T) *ha due lati paralleli.*]
m)(x) $[(2 - x)(2 + x) = 4 - x^2]$
n)(x) $\left[\dfrac{1}{x^2 + 1} \textit{ esiste.}\right]$

16. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c\}$ Quanti elementi ha $A \times B$?

17. Se $A \times B$ ha 12 elementi, detti n e m il numero di elementi di A e B rispettivamente, quali sono le possibili coppie (n, m)?

18. Siano $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, P l'insieme dei numeri pari, D l'insieme dei numeri dispari. Determinare i seguenti insiemi (P^c il complementare di P):

a) $P \cup D$
b) $P \cap D$
c) P^c
d) D^c

19. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}|\ x > -1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}|\ x \leq 2\}$. Stabilire se le proposizioni sono vere o false:

a) $A \subset B$
b) $B \subset A$
c) $A \cup B = \mathbb{R}$

d) $A \cap B = \emptyset$
e) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}| \ -1 < x \leq 2\}$
f) $0 \in A \cap B$
g) $3 \in A^c$
h) $10 \in B^c$
i) $A^c \cap B^c = \emptyset$
l) $-1 \in A^c \cap B$

Risposte
1.
a) V , b) F , c) F , d) n.p. , e) n.p., f) V , g) n.p. , h) F , i) F , l) V ,
m) F , n) n.p. , o) F , p) V , q) n.p. , r) F , s) V , t) V , u) F.
2.
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \{3, 4\}$.
3.
Posto $A = \{x \in \mathbb{N}|\ x$ è un multiplo di $4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}|\ x$ è un numero dispari$\}$,
$C = \{x \in \mathbb{N}|\ x < 25\}$, allora
primo enunciato: $n \in (A \cup B) \cap C$,
secondo enunciato: $n \in (B \cap C) \cup (A \cap C)$.
4.
16.
5.
V, V.
6.
a)V , b)F (2$\in A \cap B$), c)F (a è un elemento, non un insieme),
d)F , e)V , f)F , g)V .
7.
b)V , i)V , ii)F , iii)V .
8.
a) Condizione necessaria affinchè valga E è che valga D.
b) Condizione sufficiente affinchè valga E è che valga D.
10.
a) $x + 1 \leq 0$; b) $2x + 3 \neq 0$;
c) *La temperatura è minore o uguale a* $38°$.
d) *Esiste un cavallo non bianco.*
e) *Tutti gli ombrelli non sono neri.*
f) *Qualche venerdì gioco a pallone.*
11.
$\neg P$:"esiste un numero naturale maggiore di 1 che non è somma di due numeri dispari ".
P è falsa ($\Leftrightarrow \neg P$ è vera), infatti $3 = 2 + 1$.
12.
m è *multiplo* di $n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $m = k \cdot n$.
m è *divisore* di $n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = k \cdot m$.
m è *opposto* di $n \Leftrightarrow n + m = 0$;

l'opposto di un numero n esiste sempre e si indica con $-n$.
m è *inverso* di $n \Leftrightarrow n \cdot m = 1$;
l'inverso di un numero $n \neq 0$ esiste sempre e si indica con n^{-1}.
14.
Deve essere $a \cdot b \geq 0$.
15.
a)$\forall$, b)$\exists$, c)$\forall$, d)$\exists$, e)$\exists$, f)$\exists$, g)$\exists$, h)$\forall$, i)$\exists$, l)$\forall$, m)$\forall$, n)$\forall$.
16.
$5 \cdot 3 = 15$ elementi.
17.
(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3).
18.
a) $\mathbb{N}$, b) $\emptyset$, c) D , d) P.
19.
a)F , b)F , c)V , d)F , e)V , f)V , g)F , h)V , i)V , l)V.

ESERCIZI 2. - Numeri reali - Percentuali

1. Scrivere come numero decimale le seguenti frazioni

a) $\dfrac{156}{10^2}$; b) $\dfrac{45}{10^5}$; c) $-\dfrac{61}{10^3}$; d) $\dfrac{335}{20}$

Risposte.
a) $1,56$; b) $0,00045$; c) $-0,061$; d) $16,75$.

2. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri

a)$\dfrac{4}{5}, \ -\dfrac{5}{8}, \ \dfrac{3}{4}, \ -\dfrac{7}{9}, \ \dfrac{19}{23}$

b)$\sqrt{2}, \ \sqrt[3]{3}$

c)$\sqrt[3]{2^4}, \ \sqrt[4]{3^2}$

d)$\sqrt{-1+\sqrt{2}}, \ \dfrac{1}{2}$

Risposte.
a) $-\dfrac{7}{9} < -\dfrac{5}{8} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5} < \dfrac{19}{23}$; b) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{3^2} < \sqrt[3]{2^4}$; d) $\dfrac{1}{2} < \sqrt{-1+\sqrt{2}}$.

3. a) Se è $2 \le a \le 2,5$ e $3 \le b \le 4,5$, tra quali numeri sono compresi

$-a; \ -b; \ \dfrac{1}{a}; \ \dfrac{1}{b}; \ a+b; \ \ a-b; \ \ a\cdot b; \ \ a:b$?

b) Se è $3,2 \le a \le 5,4$ e $-2,4 \le b \le -1,8$, tra quali numeri sono compresi

$-a; \ -b; \ \dfrac{1}{a}; \ \dfrac{1}{b}; \ a+b; \ \ a-b; \ \ a\cdot b; \ \ a:b$?

c) Se è $-2,3 \le a \le 1,5$, tra quali numeri è compreso $|a|$?

d) Trovare una frazione strettamente compresa tra $\dfrac{5}{13}$ e $\dfrac{6}{13}$.

Risposte.
a) $-2,5 \le -a \le -2$; $-4,5 \le -b \le -3$;

$\dfrac{1}{2,5} \le \dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4,5} \le \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{3}$;

$5 \le a+b \le 7$; $-2,5 \le a-b \le -0,5$;

$6 \le a\cdot b \le (2,5)\cdot(4,5)$; $\dfrac{2}{4,5} \le \dfrac{a}{b} \le \dfrac{2,5}{3}$.

b) $-5,4 \le -a \le -3,2$; $1,8 \le -b \le 2,4$;

$\frac{1}{5,4} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3,2}$; $-\frac{1}{1,8} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{2,4}$;

$0,8 \leq a + b \leq 3,6$; $5 \leq a - b \leq 7,8$;

$(-2,4) \cdot (5,4) \leq a \cdot b \leq (-1,8) \cdot (3,2)$; $\frac{5,4}{-1,8} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3,2}{-2,4}$.

c) $0 \leq |a| \leq 2,3$. d) $\frac{1}{2}(\frac{5}{13} + \frac{6}{13}) = \frac{11}{26}$.

Percentuali - Proporzioni

1. Due laghi distano $2cm$ su una carta geografica in scala 1 : 20.000. Quanto distano su una carta in scala 1 : 80000?

Risposta.
Per definizione la scala $1 : s$ significa che una misura reale x e una misura sulla carta y stanno in un rapporto $x : y = s$. Pertanto la distanza reale è $2 \cdot 20.000.cm$, che su una scala 1 : 80000 corrisponde a $\frac{2 \cdot 20.000}{80.000} = 0,5cm$.

2. Scrivere in forma percentuale i seguenti numeri
a) 4; b) $0,23$; c) $2,1$; d) $0,004$

Risposte.
a) 400%; b) 23%; c) 210%; d) $0,4\%$.

3. a) Supponiamo che in una città di 6 milioni di abitanti abbiano diritto al voto 4,2 milioni di abitanti. Quale è la percentuale degli aventi diritto al voto, rispetto all'intera popolazione?

b) Supponiamo che in una votazione i partecipanti siano stati il 70% degli aventi diritto al voto. Se il 30% dei votanti vota il candidato A, quale è la percentuale delle preferenze ricevute da A rispetto agli aventi diritto al voto?

c) Se due grandezze p e q sono inversamente proporzionali, se p diminuisce del 20% allora di quale percentuale aumenta q ?

d) Se una casa ha valore catastale di 100.000 euro, quanto si deve versare di ici, se l'ici è del 4 per mille?

Risposte.
a) 70%, pari a $(4,2 : 6)$; b) 21%, pari a $(30\% \cdot 70\%)$.

c) 25%. Infatti se $p \cdot q = K$, e $p' \cdot q' = (100 - 20)\%p \cdot q' = K$, allora

$q' = \frac{K}{80\%p} = \frac{100}{80}q = \frac{80+20}{80}q = q + 1/4q$, e $1/4 = 0,25$.

d) 400 euro, pari a $(4 : 1000) \cdot 100000$ euro.

ESERCIZI 3. Proprietà delle potenze

1. Si riscriva ogni espressione letterale in modo che contenga solo esponenti positivi e la si semplifichi.

a) $c^{-1/2} \cdot c^{5/2}$;

b) $(x^{-3/4})^{-8/3}$;

c) $\left(125x^{-18}\right)^{-4/3}$;

d) $\left(\dfrac{32}{x^{-5}}\right)^{-2/5}$;

e) $\dfrac{(xy)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$;

f) $(-3y^2)^2$;

g) $(2x^{1/3}y^{3/2})^6$;

h) $\left(\dfrac{125x^{-9}y^{-12}}{8z^{-15}}\right)^{2/3}$.

Risposte.
a) c^2; b) x^2; c) $\dfrac{x^{24}}{625}$; d) $\dfrac{1}{4x^2}$; e) $\dfrac{1}{x+y}$; f) $9y^4$; g) $64x^2y^9$; h) $\dfrac{25z^{10}}{4x^6y^8}$.

2. Dire se le espressioni hanno significato, e se sì semplificarle usando solo potenze.

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$;

b) 0^1;

c) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$;

d) $(-1)^0$;

e) $(-3)^{\sqrt{2}}$;

f) $\sqrt{16}$;

g) $\sqrt[5]{(-3)^{-1}}$;

h) $\sqrt[4]{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

i) 0^0;

l) $\sqrt[3]{-8}$.

Risposte
a) Sì:$2^{1/6}$; b) sì:0; c) sì:$2^{\sqrt{3}/2}$; d) sì:1; e) non ha significato; f) sì: 2^2;

g) sì:$-\left(3^{-1/5}\right)$; h) sì: $3^{3/4} \cdot 2^{-1/2}$; i) non ha significato; l) sì:-2.

3. Vero o falso?

a) $2^{2/3} + 3^{2/3} = 5^{2/3}$;

b) $(\dfrac{1}{2})^{-1/2} = \sqrt{2}$;

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$; d) $x^{4/3}\cdot y^{5/3}=xy\sqrt[3]{xy^2}$;

e) $(x^{1/2})^{1/3}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^{-1}}}, x\neq 0$; f) $a^x-a^y=a^{x/y}$;

g) $\sqrt{9}=\pm 3$; h) $\sqrt{16}=|-4|$;

i) $\sqrt{-4}=-2$; . l) $2^{2/3}\cdot 3^{2/3}=6^{2/3}$.

Risposte.

a)F; b)V; c)F; d)V; e)V; f)F; g)F; h)V; i)F; l)V.

4. Semplificare le espressioni.

a) $16^{-3/4}$; b) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-1/3}$;

c) $\left(5^{-2/3}\right)\cdot\left(2^{4/3}\right)^{-1/2}$; d) $\left(3^{-1/3}\cdot 2^{-2/3}\right)^{6/5}:54^{1/5}$;

e) $\dfrac{\sqrt[3]{3^4}}{3}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$;

g) $\sqrt{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{3^3}$; h) $\left(3\sqrt[3]{-3}\right)^2$;

i) $\sqrt{8}\sqrt{2}$; l) $\sqrt[4]{(-3)^{4/3}}$.

Risposte.

a)$\dfrac{1}{8}$; b)$\dfrac{5}{3}$; c)$\dfrac{\sqrt[3]{10}}{10}$; d) $\dfrac{1}{6}$; e) $\sqrt[3]{3}$; f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; g) $3\sqrt{3}$; h) $9\sqrt[3]{9}$ i) 4; l) $\sqrt[3]{3}$.

5. Scrivere i radicali usando solo potenze di a e di b.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\cdot\sqrt[3]{b^2}$; b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}:\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$;

c) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b^3}}:\sqrt[4]{ab}$; d) $\sqrt{a}\sqrt[3]{ab^2}:b$;

e) $\sqrt[15]{a^3b^5}$; f) $\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}$.

Risposte.
a) $a^{-2/3}\cdot b^{1/3}$; b) $a^{-1/6}$; c) $a^{5/12}$; d) $a^{5/6}b^{-1/3}$; e) $a^{1/5}b^{1/3}$; f) $a^{7/8}$.

6. Supponendo a e b numeri reali e n numero intero positivo, stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

a) Se $a \neq 0$, allora $a^{2n} - a^n = a^{-n}(a^{3n} - a^{2n}), \forall n$.

b) Se $a \neq 0$, allora $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^{-2n} = -a^{2n}, \forall n$.

c) Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $a^{-1} < b^{-1}$.

d) Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $b^{-1} < a^{-1}$.

e) Se $a \cdot b \neq 0$, allora $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$.

f) Se $a \neq 0$, allora $[(a^{-n})^{-2n}]^2 = a^{2n^4}, \forall n$.

g) $[(-a^n)^n]^{2n} = a^{2n^3}, \forall a, \forall n$.

h) $(n^2 - n)^{2/3} = n^{4/3}(1 - n^{-1})^{2/3}, \forall n$.

i) Se $0 < a < 1$, allora $\sqrt{a} > a$.

l) Se $a > 1$, allora $\sqrt{a} < a$.

m) Se $a^2 < b^2$, allora $a < b$.

n) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$.

Risposte.
a) V ; b) F; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V ; l) V ; m) F ; n) V.

ESERCIZI 4 - Polinomi

Espressione algebrica razionale, monomi simili, binomio, trinomio, grado, polinomio omogeneo, prodotti notevoli.

1. Stabilire quali tra le seguenti espressioni algebriche sono razionali.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{x}{z}$; b) $\sqrt{\frac{ab^4-3}{a+bc}}$; c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})xy^4$.

Risposte.

a) sì; b) no ; c) sì.

2. Stabilire se sono polinomi.

a) $3xy^5-2x^2y+1$; b) $\sqrt{2x+3}$;

c) $x^{1/2}+5y^2$; d) $\frac{x^2+3x-1}{x-2x^6}$.

Risposte.

a) sì; b) no; c) no; d) no.

3. Stabilire il grado dei polinomi.

a) $3x^2y^4-3xy^5+xy^2-1$;

b) $2x^2z-3xy^2+5z^3$

Risposte.

a) 6; b) 3 (omogeneo).

4. Calcolare.

a) $2(x^3+y^3)-2(x+y)(x^2+y^2)+2xy(x+y)$;

b) $(5x-2)^3$;

c) $(3a^2bc-2abc^2):(-ab)$;

d) $(x^2-2xy)^2$;

e) $(3x^2y):(\frac{4}{3}x^4y^3)$.

Risposte.

a) 0; b) $125x^3-150x^2+60x-8$; c) $-3ac+2c^2$; d) $x^4-4x^3y+4x^2y^2$; e) $\frac{9}{4}\frac{1}{x^2y^2}$.

Divisione di polinomi. $A_n(x):B_p(x)=Q_{n-p}(x)+R_k(x):B_p(x), k<p$.

5. Eseguire le seguenti divisioni.

a) $(3x^4+x^3-12x+9):(x^2-2x)$;

b) $(2x^4 + x^2 + 3) : (x^2 - x)$;

c) $y^5 : (y^2 + y + 1)$;

d)$(z^4 + 4) : (z^2 + z + 1)$.

Risposte.
a) $Q(x) = 3x^2 + 7x + 14,\ \ R(x) = 16x + 9$;

b) $Q(x) = 2x^2 + 2x + 3,\ \ R(x) = 3x + 3$;

c) $Q(y) = y^3 - y^2 + 1,\ \ R(y) = -y - 1$;

d) $Q(z) = z^2 - z\ ,\ \ R(z) = z + 4$.

Regola di Ruffini: $A(x) = (x - a)Q(x) + R, R = A(a)$.

A(x) è divisibile per $(x - a)$ *sse* $R = 0$.

Radici, molteplicità. Regola dei divisori per le radici razionali.

6. Eseguire le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $(3x^4 - 2x^3 - 10x - 8) : (x - 2)$;

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x - 1) : (x - \frac{2}{3})$;

c) $(2x^3 - x^2 + x + 5) : (2x + 1)$;

d) $(z^4 + 4) : (z + 1)$.

Risposte.
a) $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + +8x + 6,\ \ R = 4$;

b) $Q(x) = 2x^2 + \frac{19}{3}x + \frac{2}{9},\ \ R = -\frac{23}{27}$;

c) $Q(x) = x^2 - x + 1,\ \ R = 4$;

d) $Q(z) = z^3 - z^2 + z - 1,\ \ R = 5$.

7. Verificare se sono divisibili per i binomi accanto; se sì eseguire la divisione con la regola di Ruffini.

a) $x^3 + x^2 - 6x + 7;\quad x - 1$;

b) $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27;\quad x - 3$;

c) $\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1;\quad x - \frac{1}{2}$.

Risposte.
a)no; b) sì, $Q(x) = 2x^2 + 9x + 9$; c)sì, $Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x + 2$.

8. Eseguire le divisioni con la regola di Ruffini ($R = 0$).

a) $x^3 + y^3$; $x + y$;

b) $(x^4 - 16)$; $x - 2$;

c) $(x^5 - 1)$; $x - 1$;

d) $(x^3 - 1)$; $x - 1$.

Risposte.
a) $x^2 - xy + y^2$;

b) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$;

c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

d) $x^2 - x + 1$.

Scomposizione in fattori. Formula delle radici di un trinomio di secondo grado.

9. Scomporre in fattori.

a) $2x^2 + x - 1$;

b) $x^2 - x - 2$;

c) $3x^2 + 5x - 2$;

d) $16x^5 - 2x^2$;

e) $9x^3 - 9x^2 - x + 1$;

f) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$;

g) $2x^3 - x^2 - 3x$.

Risposte.
a) $(2x - 1)(x + 1)$;

b) $(x - 2)(x + 1)$;

c) $(3x - 1)(x + 2)$;

d) $2x^2(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$;

e) $(x - 1)(3x - 1)(3x + 1)$;

f) $(3x - 1)^3$;

g) $x(x + 1)(2x - 3)$.

10. Semplificare le espressioni.

a) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 27}$;

b) $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$;

c) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Risposte.

a) $\dfrac{x(x-3)}{x^2+3x+9}$;

b) $\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-x+1}$;

c) $\dfrac{x^2-3x+1}{2x+1}$.

ESERCIZI 5 - Equazioni algebriche e sistemi.

Identità: uguaglianza tra due espressioni letterali verificata per ogni valore attribuito alle variabili nel testo.

Esempi:

i) $xy\sqrt{x} = y\sqrt{x^3}, x \geq 0;$

ii) $-x = \sqrt{x^2}, x \leq 0;$

iii) $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y, x \neq -y.$

Equazione: uguaglianza tra due espressioni letterali che può essere vera o falsa a seconda dei valori attribuiti alle variabili.

Esempi:

i) $-x = \sqrt{x^2},$ vera se $x \leq 0$, falsa se $x > 0$;

ii) $3x - 2 = 0,$ vera se $x = \dfrac{2}{3}$, falsa se $x \neq \dfrac{2}{3}$.

Equazioni di primo grado: $ax + b = 0, a \neq 0.$

1. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\dfrac{x-3}{7} - 1 = \dfrac{x-9}{21} + \dfrac{6-x}{3};$

b) $(x - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2});$

c) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{1}{3}x = 1 + \dfrac{1}{6}x.$

Risposte.

a) 7; b) $\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$; c) impossibile.

2. Risolvere le seguenti equazioni dipendenti da parametro (x incognita).

a) $ax - 3 = 2x;$

b) $\dfrac{x-b}{a} + \dfrac{x-a}{b} = 2,\ (a \neq 0, b \neq 0).$

Risposte.

a) Se $a \neq 2, x = \dfrac{3}{a-2}$; se $a = 2$, impossibile.

b) Se $a + b = 0, \forall x$; se $a + b \neq 0, x = a + b$.

Equazioni di secondo grado. Formula ridotta. Relazione tra i coefficienti e le radici.

3. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $4x^2 - 1 = 0;$

b) $2x^2 + 3 = 0;$

c) $x + 6 - x^2 = 0;$

d)$(x-3)^2+(x-4)^2=x$;
e) $(t+1)^2-t(1-t)-(t-2)(t+2)=4$;

Risposte.
a) $x=\pm\frac{1}{2}$; b) impossibile; c) $x=-2, x=3$; d) $x=\frac{5}{2}, x=5$;
e) impossibile.

4. Data l'equazione: $x^2+kx+k-1=0$, determinare per quali valori reali di k
a) una soluzione è $x=2$;
b) una soluzione è $x=0$;
c) la somma delle radici è 2;
d) il prodotto delle radici è 3;
e) le radici sono coincidenti;
f) le radici sono opposte;
g) le radici sono una l'inverso dell'altra.

Risposte.
a) $k=-1$; b) $k=1$; c) $k=-2$; d) $k=4$;
e) $k=2 \quad (\Delta=0)$; f) $k=0$ (somma=0); g) $k=2$ (prodotto $=1$).

5. Verificare che le seguenti equazioni sono impossibili e trasformare i trinomi in somma di due quadrati.
a) $4x^2+2x+1=0$;
b) $9x^2-3x+2=0$;

Risposte.
a) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $(3x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

Equazioni razionali fratte.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \wedge B(x)\neq 0.$$

6. Risolvere le seguenti equazioni.
a) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$;
b) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$;
c) $\frac{4x+a}{x+4a}=\frac{4x-a}{x-a}$;

Risposte.
a) $x=\frac{1}{2}$; b) impossibile; c) se $a=0: \forall x\neq 0$; se $a\neq 0: x=\frac{a}{6}$.

Equazioni binomie: $x^n - b = 0, n \in N, n \geq 2$. Le eventuali soluzioni si dicono *radici (n-esime) algebriche di b.*

i) $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) se n è dispari, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{b}$;

iii) se n è pari e $b > 0$, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{b}$;

iv) se n è pari e $b < 0$, allora $x^n = b$ non ha soluzioni.

Si ricorda che, se b è negativo e n è dispari, si ha per definizione $\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{|b|}$.

7. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^3 = 27$;

b) $x^4 = 81$;

c) $x^4 + 16 = 0$;

d) $(x + 2)^4 = 4$.

Risposte.

a) $x = 3$; b) $x = \pm 3$; c) impossibile; d) $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

Equazioni biquadratiche $(ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0)$.

Si pone $x^2 = t$, con $t \geq 0$.

8. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

b) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$;

c) $x^4 + x^2 + 2 = 0$;

d) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;

e) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$;

f) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Risposte.

a) $x = \pm 1, x = \pm 3$; b)impossibile; c) impossibile; d)$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) impossibile; f) $x = \pm 1, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $2x^4 + x^3 - 2x^2 - x = 0$;

b) $3x^3 + 7x + 10 = 0$;

c) $(x^4 + 2)\,(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 1) = 0$;

d) $(x + 3)^4 = (x + 2)^2$.

Risposte.

a) $x = \pm 1, x = -\dfrac{1}{2}, x = 0$; b) $x = -1$, (usa Ruffini...); c) $x = -1, x = \sqrt{2}$; d) $= \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Sistemi di equazioni

Metodo di sostituzione e metodo di riduzione. Sistema determinato, indeterminato, impossibile.

10. Trovare le coppie (x, y) soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 2x + 5y & = 0 \\ 4x + 3y & = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x - 3y & = 1 \\ -4x + 6y & = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x - 8y & = 6 \\ -\dfrac{3}{2}x + 4y & = -3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + y & = 1 \\ xy & = -2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - y^2 & = 0 \\ xy + x - 2y & = 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ y - \sqrt{3}x & = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} kx + y & = 1 \\ 3x + y & = 2 \end{cases}$;

Risposte.

a) $\left(\dfrac{5}{2}, -1\right)$; b) impossibile; c) $\left(k, \dfrac{3k-6}{8}\right), \forall k \in R$; d) $(-1, 2)\,; (2, -1)$;

e) $(0, 0)\,; (1, 1); (4, -2)$; f) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

g) se $k \neq 3$, $\left(\dfrac{1}{3-k}, \dfrac{3-2k}{3-k}\right)$; se $k = 3$, impossibile.

Equazioni col valore assoluto.

i) $|A(x)| = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$;

ii) se $b > 0$, $|A(x)| = b \Leftrightarrow A(x) = \pm b$;

iii) se $b < 0$, $|A(x)| = b$ non ha soluzioni.

11. Dire se le seguenti equivalenze sono vere o false.

a) $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$;

b) $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$;

c) $A^2(x) = B^2(x) \Leftrightarrow |A(x)| = |B(x)|$;

d) $x^2 = (3x+1)^2 \Leftrightarrow x = \pm |3x+1|$;

e) $2x + 1 = |2 - x| \Leftrightarrow |2x+1| = |2-x|$.

Risposte.
a) F; b) V; c) V; d) V; e) F.

12. Risolvere le seguenti equazioni.
a) $|x+2| = x(x-2) - (x-1)^2$;
b) $|x^2 - 4x + 2| = 2$;
c) $|x-1| = |2x-3|$.

Risposte.
a) impossibile ; b) $x = 0, x = 2, x = 4$; c) $x = 2, x = \frac{4}{3}$.

Equazioni irrazionali.

Si usano le equivalenze

i) se n è un intero dispari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$;

ii) se n è un intero pari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$.

Perciò, elevando a potenza pari entrambi i membri di una equazione, si possono introdurre soluzioni "estranee" e diventa obbligatoria la "*verifica delle soluzioni*" nell'equazione di partenza.

13. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{5x+4}$;

b) $\sqrt{24 - x^2 + 2x} + x - 2 = 0$;

c) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - 1 = 0$;

d) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt{3-x} = 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3 + 3x + 7} - 1 = x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$;

g) $x^3 = \sqrt{(2-x)^3}$;

h) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x+1}$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x = -2$; c) $x = -1, x = 3$; d) impossibile; e) $x = \pm\sqrt{2}$.; f) $x = 9$; g) $x = 1$; h) impossibile.

ESERCIZI 6. Disequazioni algebriche e sistemi.

Principi di equivalenza:

1) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$;
2) Se $k > 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) > kB(x)$;
3) Se $k < 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) < kB(x)$;

In conseguenza si hanno le seguenti equivalenze:

a) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow -A(x) < -B(x)$;

b) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow C(x) \cdot A(x) > C(x) \cdot B(x)$, per ogni x tale che $C(x) > 0$;

c) $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$, per ogni x tale che $B(x) \neq 0$.

Disequazioni di primo grado.
Se $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$;
Se $a < 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$.

1. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $2(x + 2) - 5(x + 3) \leq 1$;

b) $\dfrac{x+3}{2} + x - 2 > \dfrac{3x+3}{2} - 3$;

c) $(x - 1)^2 - 3(x + 1) > x(x + 2)$;

Risposte.
a) $x \geq -4$; b) $\forall x$; c) $x < -\dfrac{2}{7}$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni in dipendenza dal parametro a reale.

a) $ax - 3(x - 1) > -2x$;

b) $x - 5 > (a^2 + 1)\, x$;

c) $ax + 7 < (a - 1)x$.

Risposte.
a) se $a > 1, x > -\dfrac{3}{a-1}$; se $a = 1, \forall x$; se $a < 1, x < -\dfrac{3}{a-1}$;
b) se $a = 0$, impossibile; se $a \neq 0, x < -\dfrac{5}{a^2}$; c) $x < -7, \forall a$.

Disequazioni di secondo grado.

Esaminiamo una disequazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c > 0$, oppure $ax^2+bx+c < 0$, dove $a > 0$ (se $a < 0$, si perviene a questo caso moltiplicando entrambi i membri per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza).

Supponiamo allora

$$a > 0, \quad P(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

(Δ discriminante del trinomio di secondo grado).

Allora

1) se $\Delta > 0$,
allora $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ha due radici reali distinte:
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1, x > x_2$.

2) se $\Delta = 0$,
allora $P(x) = a(x - x_0)^2$ ha due radici reali coincidenti $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$,
e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq x_0$;

3) se $\Delta < 0$,
$P(x)$ non ha radici reali, e $P(x) > 0\ \forall x \in R$.

3. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $x - 2x^2 > 5$;

b) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$;

c) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$;

d) $x^2 - 5x + 2 > 0$;

e) $4x^2 - 3x \leq 1$;

f) $(x + 1)(5x + 1) \leq 4x(2 + x)$;

g) $4x(x - 2) < 11 + (x - 4)^2$;

h) $x^2 - 9 \leq 0$;

i) $x^2 < 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$.

Risposte.

a) Impossibile; b) $\forall x$; c) $x = \dfrac{3}{2}$; d) $x < \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}, x > \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$; e) $-\dfrac{1}{4} \leq x \leq 1$; f) $x = 1$; g) $-3 < x < 3$; h) $-3 \leq x \leq 3$; i) impossibile.

Disequazioni di grado superiore al secondo $P_n(x) > 0$ o $P_n(x) < 0, n > 2$.

Nel caso in cui il polinomio P_n si scompone in fattori di primo e secondo grado, si riportano i segni dei fattori in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni del prodotto.

4. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $x^3 - 2x^2 > x - 2$;

b) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x + 3)(1 - x) \geq 0$;

c) $(x^2 + x)(3x + 1)^2(6x^2 + 2) < 0$;

d) $x^3 < -5x - 6$.

Risposte.

a) $-1 < x < 1, x > 2$; b) $x \leq 1-\sqrt{3}, 1 \leq x \leq 1+\sqrt{3}$; c) $-1 < x < 0, x \neq -\frac{1}{3}$; d) $x < -1$.

Disequazioni razionali fratte $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ o $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$.

Si studia separatamente il segno di $A(x)$ e di $B(x)$, si riportano i segni in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni come per il prodotto.

5. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\dfrac{3x}{x+2} \geq 1$;

b) $\dfrac{(5x-2)^3}{x-1} \leq 0$;

c) $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{2x-3}{x-4} \geq \dfrac{x}{x-2}$;

e) $\dfrac{x^2-3}{x^2+3} > \dfrac{x^2+3}{x^2-3}$;

f) $\dfrac{2x^2-3}{3x+1} + 3 > 0$.

Risposte.

a)$x < -2, x \geq 1$; b)$\frac{2}{5} \leq x < 1$; c)$x < -3, x > 1$; d)$x < 2, x > 4$; e)$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, x \neq 0$; f)$-\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{3}, x > 0$.

Sistemi di disequazioni.

L'insieme delle soluzioni è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna disequazione del sistema.

6. Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x^2-25 \leq 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+2 \geq 0 \\ \dfrac{x-2}{x+3} < 0 \\ x > 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2-16 \leq 0 \\ x^2-3x-4 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^2 + 5 \le 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$

Risposte.

a) $-5 < x \le 5$; b) $0 < x < 2$; c) $-3 < x \le -1, x = 4$; d)$3 < x < 4$; e) impossibile.

Disequazioni col valore assoluto.

Sono importanti i due casi particolari seguenti.

i) La disequazione $|x| \ge b$

se $b \le 0$, è verificata $\forall x$,

se $b \ge 0$, è verificata sse $x \le -b \vee x \ge b$.

ii) La disequazione $|x| \le b$

se $b < 0$, è impossibile,

se $b \ge 0$, è verificata sse $-b \le x \le b$.

7. Risolvere le seguenti disequazioni.
a) $|x + 2| < 1$;
b) $|x^2 - 4x + 2| < 2$;
c) $|x^2 - 4x + 2| \le 2$;
d) $|2x - 3| > 5$.
e) $|3x - 1| > x$.

Risposte.
a) $-3 < x < -1$; b) $0 < x < 4, x \ne 2$; c) $0 \le x \le 4$ d) $x < -1, x > 4$; e) $x < \frac{1}{4}, x > \frac{1}{2}$.

Disequazioni irrazionali.

Per risolvere una disequazione irrazionale è utile ricordare che:
se n è un intero positivo *dispari* allora
$A^n(x) \ge B^n(x) \Leftrightarrow A(x) \ge B(x)$,
se n è un intero positivo *pari* allora
$A^n(x) \ge B^n(x)$ è equivalente a $A(x) \ge B(x)$ *solo se* $A(x) \ge 0$ e $B(x) \ge 0$.

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *dispari*, si isola il radicale e si elevano entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale, ottenendo una disequazione equivalente.

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *pari*, si isola il radicale e si deve studiare il segno dell'altro membro prima di elevare entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale. Ricordiamo inoltre che un radicale di indice pari è reale solo se il radicando è ≥ 0 (*condizione di realtà)*, ed è sempre non negativo (quando reale).

Sono importanti i due casi particolari seguenti ($n = 2$).

i) La disequazione $\sqrt{P(x)} \geq b$

se $b \leq 0$, è equivalente a $P(x) \geq 0$ (cdr del radicale);

se $b \geq 0$, è equivalente a $P(x) \geq b^2$.

ii) La disequazione $\sqrt{P(x)} \leq b$

se $b < 0$, è impossibile;

se $b \geq 0$, è equivalente a $0 \leq P(x) \leq b^2$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\sqrt{2x+6} < 4$;

b) $\sqrt{-4-x^2+2x} - 2 \leq 0$;

c) $\sqrt{x+3} > 2$;

d) $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt{2-x} \geq 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3+3x+9} > x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 > 0$;

g) $x < \sqrt{2-x}$;

h) $\sqrt{x} < x$;

i) $\sqrt{2x-3} < x$;

l) $\sqrt{x^2-4} < |x|$.

Risposte.

a) $-3 \leq x < 5$; b) impossibile; c) $x > 1$; d) impossibile; e) $x > -3$; f) $x > 9$ (porre $\sqrt{x} = t \geq 0$); g) $x < 1$; h) $x > 1$; i)$x \geq \frac{3}{2}$; l) $x \leq -2, x \geq 2$.

ESERCIZI 7. Geometria analitica.

Il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Teorema di Pitagora. Distanza tra due punti. Punto medio di un segmento.

1. In un sistema di coordinate cartesiane disegnare i seguenti punti:
$A = (3, 2)$; $B = (0, -1)$; $C = (-3, 0)$; $D = (\sqrt{2}, 2)$; $E = (-2, -2)$.

2. Determinare le lunghezze e le coordinate dei punti medi dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti:
a) $A = (-1, -2)$, $B = (-1, 3)$;
b) $A = (-1, -2)$, $B = (1, 1)$;
c) $A = (0, -2)$, $B = (-1, 0)$;

Risposte.
a) $5, (-1, \frac{1}{2})$; b) $\sqrt{13}, (0, -\frac{1}{2})$; c) $\sqrt{5}, (-\frac{1}{2}, -1)$.

3. Disegnare il triangolo di vertici $A = (8, 0), B = (2, 3), C = (8, 6)$; verificare che è isoscele e determinarne area e perimetro.

Risposte.
$AB = BC = 3\sqrt{5}$, area 18, perimetro $6(\sqrt{5} + 1)$.

4. In un triangolo ABC isoscele i lati AB e BC misurano $20cm$ e l'altezza condotta dal vertice B misura $10cm$. Calcolare l'area del triangolo.

Risposta.
$100\sqrt{3}cm^2$.

Equazione della retta. $ax + by + c = 0$.

Se $b \neq 0$, la retta è non verticale e il numero $m = \dfrac{-a}{b}$ si dice *pendenza* della retta.

Se $b \neq 0$, comunque si scelgano due punti $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ che appartengono alla retta, $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Se $b = 0$, $(a \neq 0)$ la retta è verticale e l'equazione, del tipo $x = k$, è soddisfatta da tutti i punti $(k, y), \forall y \in \mathbb{R}$.

Due rette sono *parallele* se hanno la stessa pendenza o sono entrambe verticali.

Due rette non verticali sono *perpendicolari* se le pendenze m e m' soddisfano la relazione $m \cdot m' = -1$.

L'equazione della *retta passante per un punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ e di pendenza m è $y = y_0 + m(x - x_0)$.

L'equazione della *retta per due punti* $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ è:

i) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$;

ii) $x = x_1$, se $x_1 = x_2$ (retta verticale);

iii) $y = y_1$, se $y_1 = y_2$ (retta orizzontale).

5. Tracciare il grafico delle rette date dalle seguenti equazioni:

a) $2x - 4 = 0$; b) $3y + 5 = 0$;
c) $x - 2y = 0$; d) $y = 3x - 1$;
e) $y = -x + 1$; f) $4x + 2y - 3 = 0$.

7. Date le equazioni:
a) $x - 2y + 3 = 0$,
b) $3x + y - 2 = 0$,
si determinino le coordinate dei punti di ascisse:
$-2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,$
e si disegnino sul piano cartesiano; si verifichi che i punti sono allineati.

8. Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti, e disegnarle sul piano cartesiano.
a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$;
b) $A = (0, 3)$, $B = (1, 3)$;
c) $A = (2, 2)$, $B = (1, 4)$;
d) $A = (-3, 1)$, $B = (3, -2)$;
e) $A = (-1, 1)$, $B = (-1, -5)$;

Risposte.
a) $y = 2x$; b) $y = 3$; c) $y = -2x + 6$; d) $2y = -x - 1$; e) $x = -1$.

9. Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto A e di pendenza m indicati, e disegnarle sul piano cartesiano.
a) $A = (0, 0)$, $m = 1$;
b) $A = (0, 3)$, $m = -2$;
c) $A = (2, 2)$, $m = 4$;
d) $A = (-3, 1)$, $m = 0$.

Risposte.
a) $y = x$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 4x - 6$; d) $y = 1$.

10. Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto dato e rispettivamente parallela e perpendicolare alla retta a fianco indicata.
a) $A = (0, 1)$, $3x - 4y = 0$;
b) $A = (3, -2)$, $y = 3x + 2$;
c) $A = (2, 5)$, $x = -1$.

Risposte.

a) $y = \frac{3}{4}x + 1$; $y = -\frac{4}{3}x + 1$; b) $y = 3x - 11$; $y = -\frac{1}{3}x - 1$; c) $x = 2$; $y = 5$.

11. Dato il triangolo di vertici $A = (2, 2), B = (3, 6), C = (6, 1)$

a) verificare che è rettangolo in A;

b) verificare che è isoscele;

c) determinare il punto medio Q del segmento BC;

d) scrivere l'equazione della retta congiungente A e Q;

e) determinare il baricentro del triangolo.

Risposte.

a) La pendenza della retta per A e B è $m = 4$, quella della retta per A e C è $m' = -\frac{1}{4}$ e $m \cdot m' = -1$;

b) $AB = AC = \sqrt{17}$;

c) $Q = (\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$;

d) $5y = 3x + 4$;

e) $Baricentro = A + \frac{2}{3}(Q - A) = \frac{2Q + A}{3} = (\frac{11}{3}, \frac{9}{3})$.

12. Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $(2k - 6)x - 2ky + k - 2 = 0$

a) è parallela all'asse x;

b) è parallela all'asse y;

c) è parallela alla retta $2x - y = 0$;

d) è perpendicolare alla retta $x - y = 0$;

e) passa per l'origine;

f) passa per il punto $A = (1, -1)$.

Risposte.

a) 3; b) 0; c) -3; d) $\frac{3}{2}$; e) 2; f) $\frac{8}{5}$.

13. Interpretare geometricamente i seguenti sistemi e risolverli:

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ -x + 3y &= 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ -4x + 2y + 7 &= 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ -4x + 2y - 2 &= 0 \end{cases}$.

Risposte.

a) Il sistema ha la soluzione $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ che è il punto di incidenza delle due rette che rappresentano le equazioni del sistema;

b) il sistema è impossibile perchè le equazioni del sistema sono quelle di due rette parallele, che quindi non hanno punti in comune;

c) il sistema è indeterminato, cioè ha infinite soluzioni, che sono i punti della retta individuata sia dalla prima equazione sia dalla seconda.

15. Determinare le coordinate dei punti di intersezione delle seguenti rette:
a) $2y - 3x + 8 = 0$; $y + 2x - 3 = 0$;
b) $y - x - 6 = 0$; $4y - x - 12 = 0$;
c) $2x + 5y - 1 = 0$; $y + \frac{2}{5}x - 7 = 0$.

Risposte.
a) $(2, -1)$; b) $(-4, 2)$; c) non esiste intersezione.

16. Verificare che le tre rette di equazioni:
$x + 1 = 0$, $-3x + y - 6 = 0$, $y - x - 4 = 0$.
passano per uno stesso punto.

Risposta.
$P = (-1, 3)$.

17. Dire cosa rappresentano geometricamente le seguenti equazioni:
a) $x^2 - 4y^2 = 0$; b) $y^2 = 0$;
c) $x^2 - 1 = 0$; d) $x^2 + 1 = 0$;
e) $x^2 + y^2 = 0$.

Risposte.
a) Due rette incidenti nel piano ($x = 2y$, e $x = -2y$);
b) l'asse x "contato due volte", o anche: due rette coincidenti;
c) due rette parallele ($x = 1$ e $x = -1$);
d) l'insieme vuoto;
e) il punto $(0, 0)$.

La parabola.
E' il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta, detta direttrice, e da un punto fisso, detto fuoco.

L'equazione della parabola con retta direttrice orizzontale è:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Il punto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ si chiama *vertice* della parabola e $x = -\frac{b}{2a}$ è l'equazione dell'*asse di simmetria* della parabola.

Se $a > 0$ la parabola ha concavità rivolta verso l'alto, se $a < 0$, verso il basso.

Il punto $(0, c)$ è il punto di intersezione con l'asse y. Gli eventuali punti di intersezione con l'asse x hanno come ascissa le radici reali del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Pertanto, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ la parabola interseca l'asse x in due punti distinti, se $\Delta = 0$ interseca l'asse x solo nel vertice, se $\Delta < 0$ non lo interseca mai.

18. Disegnare "per punti" su uno stesso riferimento cartesiano le seguenti parabole:
a) $y = x^2$, $y = 2x^2$;
b) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$;
c) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = (x-1)^2$.

19. Disegnare le seguenti parabole dopo averne determinato il verso della concavità, le coordinate del vertice e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
a) $y = 4x^2 - 1$; b) $y = 4x - x^2$;
c) $y = x^2 + 2x + 6$; d) $y = -2x^2 + x - 1$.

20. Scrivere le equazioni delle parabole che passano per i seguenti punti:
a) $A = (0,1)$, $B = (1,0)$, $C = (-2,-3)$;
b) $A = (1,5)$, $B = (-1,-3)$, $C = (-4,0)$.
Risposte.
a) $y = -x^2 + 1$; b) $y = x^2 + 4x$.

21. Determinare l'equazione della parabola che ha vertice nel punto $V = (\frac{1}{2}, -2)$ e passa per il punto $A = (1,-1)$.
Risposta.
$y = 4x^2 - 4x - 1$.

22. Determinare i punti di intersezione della retta $x + y - 3 = 0$ e la parabola $y = \frac{1}{4}x^2$.
Risposta.
$(2,1), (-6,9)$.

La circonferenza.
E' il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto fisso detto centro. Tale distanza è detta raggio della circonferenza.
Se il centro è $C = (x_0, y_0)$ e il raggio è r, l'equazione è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

e svolgendo i quadrati si ottiene $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$.
Pertanto una equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

è l'equazione di una circonferenza *solo se* $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In tale caso il centro e il raggio sono:

$$C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}.$$

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, l'equazione ha solo la soluzione $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.
Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali e non è l'equazione di una circonferenza nel piano cartesiano.

23. Dire se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza e in tal caso trovare le coordinate del centro e il raggio.
a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 24 = 0$;
c) $7x^2 + 7y^2 + 14x - 56y - 25 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.

Risposte.
a) $C = (5, -4), r = 6$; b) no; c) $C = (-1, 4), r = \frac{12}{7}\sqrt{7}$; d) no.

L'ellisse
E' il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
L'equazione dell'ellisse in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse; i punti di intersezione con gli assi sono $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

L'iperbole
E' il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
L'equazione dell'iperbole in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le rette di equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$ cui la curva si avvicina indefinitamente, si chiamano *asintoti* dell'iperbole.
I punti $A_{1,2} = (\pm a, 0)$ si chiamano vertici dell'iperbole.
Se $a = b$ gli asintoti si intersecano ad angolo retto e l'iperbole si dice *equilatera*. Applicando una rotazione di 45° in senso antiorario, si ottiene l'equazione di una *iperbole equilatera riferita ai propri asintoti*:

$$xy = k^2.$$

In questo caso i vertici sono i punti $A_{1,2} = \pm(k, k)$.

24. Interpretare i seguenti sistemi disegnando i luoghi geometrici definiti dalle loro equazioni, quindi risolverli:

a) $\begin{cases} x - y - 10 &= 0 \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} &= 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} xy &= 1 \\ -2x + y &= 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 &= 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} y - \dfrac{1}{x} &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2y &= 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 4y + 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 &= 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y + 4 &= 0 \\ x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$

Risposte.

a) Impossibile intersezione tra la retta e l'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi $4, 2$.

b) Due intersezioni $(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2})$ tra la retta e la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

c) Due intersezioni $(-1, -1), (\frac{1}{2}, 2)$ tra la retta e l'iperbole equilatera di centro $(0, 0)$ riferita ai propri asintoti.

d) Una intersezione $(-2, 2)$ tra due circonferenze, una di centro $(-2, 0)$ e raggio 2 e una di centro $(-2, 4)$ e raggio 2.

e) Due intersezioni $(1, 2), (-1, 0)$ tra l'iperbole equilatera traslata nel centro $(0, 1)$ e asintoti $x = 0$ e $y = 1$, e la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$.

f) Impossibile intersezione tra due circonferenze, una di centro $(-\frac{1}{2}, -2)$ e raggio $\frac{1}{2}$,, l'altra di centro $(1, 1)$ e raggio 1.

g) Impossibile intersezione tra il solo punto $(0, -2)$ e l'iperbole di centro $(0, 0)$, vertici $(\pm 1, 0)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{2}x$

25. Calcolare:

a) l'area del quadrato inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$;

b) l'area del rettangolo inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 5$ e con due vertici di ascissa $x = 1$;

c) l'area del rombo le cui diagonali sono gli assi dell'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 - 16 = 0$.

Risposte.

a) 18; b) 8; c) $\dfrac{16}{3}$.

26. Rappresentare in un piano cartesiano i luoghi geometrici definiti dalle seguenti relazioni.

a) $x < y$;
b) $y > 2x$;
c) $y < x^2$;
d) $y > x^2 + 1$;
e) $x^2 + y^2 < 1$;
f) $xy > 0$;
g) $xy < 0$;
h) $xy = 0$;
i) $xy < 1$;
l) $x^2 - y^2 < 1$;
m) $x^2 + y^2 \geq 4$;
n) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1$;
o) $x + y > 0$;
p) $xy > -1$.

ESERCIZI 8. Funzioni reali.

Funzione, dominio, codominio, immagine.

Dati A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (eventualmente coincidenti con R stesso), con *funzione reale di variabile reale* si intende una qualunque legge che ad ogni elemento x di A associa *uno e un solo* elemento $f(x)$ appartenente a B. Si scrive $f : A \to B$ e si dice che f è definita in A a valori in B.

L'insieme A viene detto *dominio* della funzione, l'insieme B *codominio;* $f(A)$ è l'*immagine* di A mediante f; si scrive anche $y = f(x)$, dove x è la variabile *indipendente*, y la variabile *dipendente.*

Si dice *grafico* di $f : A \to B$ l'insieme $\mathfrak{G} = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Un sottoinsieme G di $\mathbb{R}^2$ è il grafico di una funzione $y = f(x)$ reale di variabile reale se e solo se ogni retta verticale o non interseca il sottoinsieme G o lo interseca solo una volta (test delle rette verticali).

1. Dire se i seguenti sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$ sono il grafico di una funzione $y = f(x)$.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$;
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 = 0\}$;
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1\}$;
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$;
f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - y = 0\}$;
g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| = 0\}$.

Risposte.
a) no; b) sì; c) no; d) no; e) no; f) sì; g) no.

2. Date le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$
calcolare:
i) $f(0)$, $f(-3)$, la pendenza della retta passante per i punti
$P = (0, f(0))$ e $Q = (-3, f(-3))$,
ii) $f(a)$, $f(a + b)$, la pendenza della retta passante per i punti
$P = (a, f(a))$ e $Q = (a + b, f(a + b))$.

Risposte.
ai) $\sqrt{3}$, 3, $-\dfrac{2}{3}$; aii) $\sqrt{3 - 2a}$, $\sqrt{3 - 2a - 2b}$, $\dfrac{\sqrt{3 - 2a - 2b} - \sqrt{3 - 2a}}{b}$;
bi) 1, $-\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{2}{5}$; bii) $\dfrac{1}{2a + 1}$, $\dfrac{1}{2a + 2b + 1}$, $\dfrac{-2}{(2a + 1)(2a + 2b + 1)}$.

Funzioni *potenza* $y = x^\alpha, \alpha \in R$. *Confronto tra esponenti.*

3. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare "per punti" nel primo quadrante i grafici delle seguenti funzioni.

a) $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$;
b) $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$;
c) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Funzioni *esponenziali* $y = a^x, a > 0$. *Confronto tra basi.*

4. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare per punti i grafici delle seguenti funzioni.

a) $y = 2^x$, $y = (\dfrac{1}{2})^x$;
b) $y = 2^x$, $y = 10^x$.

Funzioni *logaritmiche* $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. *Confronto tra basi.*

5. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare per punti i grafici delle seguenti funzioni.

a) $y = \log_2 x$, $y = \log_{0.5} x$;
b) $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$.

6. Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

a) $y = \sqrt[4]{4x-1}$;
b) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$;
c) $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{|x-4|}$;
d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
e) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+4}}$;
f) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}$;
g) $y = 2^{1/x}$;
h) $y = \log_3(x+1)$;
i) $y = \log_{0.2}|x|$.

Risposte.
a) $x \geq \dfrac{1}{4}$; b) $x \neq -1, 0$; c) $x \leq 3$; d) $x > 0$; e) $x \neq -4$; f) $x < -1, x > 0$; g) $\forall x$; h) $x \neq 0$; i) $x \neq 0$.

Funzioni crescenti, decrescenti.

Una funzione reale di variabile reale f definita in A si dice *crescente* se $\forall x, y \in A$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Si dice *decrescente* se $\forall x, y \in A$, $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$. Si dice *non decrescente* e *non crescente* se vale la proprietà con la disuguaglianza debole tra le immagini ($\leq$ o $\geq$).

7. Per ciascuna delle seguenti funzioni, tracciarne un grafico per punti e stabilire se sono funzioni crescenti o decrescenti.

a) $y = \sqrt{x}$, b) $y = x^2$, c) $y = x^3$, d) $y = \dfrac{1}{x}$, e) $y = |2x|$, f) $y = 2^x$, g) $y = 2^{-x}$, h) $y = \log_{10} x$,

i) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ x+2, & -2 < x < 0 \\ -1, & x \leq -2 \end{cases}$; h) $f(x) = \begin{cases} x & , \text{se } x < 0 \\ x-3 & , \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Risposte.

a) crescente; b) nè crescente, nè decrescente; c) crescente; d) nè crescente, nè decrescente; e) nè crescente, nè decrescente; f) crescente; g) decrescente; h) crescente; i) non decrescente h) nè crescente, nè decrescente.

Funzione pari, dispari.

Una funzione reale di variabile reale f definita in A si dice *pari* se $\forall x \in A$ $f(x) = f(-x)$, *dispari* se $\forall x \in A$ $f(x) = -f(-x)$.

8. Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

a) $y = x+1$; b) $y = x^2+1$; c) $y = \dfrac{1}{x}$; d) $\sqrt{x^3}$; e) $y = 3x$; f) $y = |x|+7$; g) $y = 3$; h) $y = \log_2(|x|+2)$; i) $y = 2^x + 3$.

Risposte.

a) nè pari, nè dispari; b) pari; c) dispari; d) dispari; e) dispari; f) pari; g) pari; h) pari; i) nè pari, nè dispari..

Traslazioni, dilatazioni, simmetrie..

8. Data la funzione $f(x) = |x|$,

a) scrivere l'espressione delle seguenti funzioni:

i) $y = f(2x)$, $y = 4f(x)$,

ii) $y = f(-x)$, $y = -f(x)$,

iii) $y = f(x)+3$, $y = f(x)-3$,

vi) $y = f(x+1)$, $y = f(x-1)$,

v) $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$;

b) tracciare il grafico di $y = f(x)$ e delle funzioni di cui al punto b), sullo stesso sistema di riferimento per ciascuna coppia indicata.

10. Fare l'esercizio precedente per le seguenti funzioni:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$, $f(x) = 2^x$.

ESERCIZI 9. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Linguaggio e notazioni:

a^x *esponenziale di base* $a, a > 0$, e *di esponente* $x \in \mathbb{R}$.

$\log_a x$ *logaritmo in base* $a, a > 0$ e $a \neq 1$, e *di argomento* $x, x > 0$.

Logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale: Sia $a > 0$ e $a \neq 1$, allora

$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0, \qquad \log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Basi particolari: base 10 : il logaritmo in base 10 di x si indica *Log* x (lettera maiuscola).

Base naturale $e = 2.71828...$(numero reale irrazionale, ovvero decimale infinito non periodico).

Il numero e è l'unica base a che soddisfa la proprietà: $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Con *logaritmo naturale* di $x, x > 0$, si intende la base e e si indica $\log x$ oppure $\ln x$.

Proprietà degli esponenziali (proprietà delle potenze):

Siano $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$; allora

$(a^x)^y = a^{xy}$,

$a^x a^y = a^{x+y}$, $\qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

$a^x b^x = (a \cdot b)^x$, $\qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Proprietà dei logaritmi:

Siano $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0$; allora

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a x^r = r \log_a x$, $\forall r \in \mathbb{R}$;
3. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (cambiamento della base).

Da queste si ottiene:

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

$\log_{1/a} x = -\log_a x$;

Inoltre: $\forall a > 0$,

$a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$a^0 = 1$.

$\forall a > 0, a \neq 1,$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1,$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1, \quad \log_{1/a} a = -1.$$

Metodo di risoluzione delle equazioni esponenziali/logaritmiche:

Sia $a > 0, a \neq 1, x, y, c \in \mathbb{R}$; allora

i) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;

ii) se $c \leq 0$, allora l'equazione $a^x = c$ è *impossibile;*

iii) se $c > 0$, allora $a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a c$;

iv) se $x > 0, y > 0$, allora $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$;

v) se $x > 0$, allora $\log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c$.

1. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali.

a) $3^x = -4$;

b) $\dfrac{2^{x+1}}{8} = \dfrac{64^x}{2} : 4^x$;

c) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 = 0$;

d) $2^{x^2} : 4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

e) $\sqrt[5]{3^{x-1}\sqrt{3^{2-x}}} = 3^{1/2}$;

f) $3^{4x} = 5$;

g) $5^x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{25}}$.

Risposte.

a) Impossibile; b) $x = -\dfrac{1}{3}$; c) $x = 0$; d) $x = -2, x = 1$; e) $x = 5$; f) $x = \dfrac{1}{4}\log_3 5$; g) $x = -\dfrac{1}{3}$.

2. Calcolare le seguenti espressioni.

a) $\log_6 1$; b) $\ln e$; c) $\log_3 \dfrac{1}{3}$;

d) $\log_3 27$; e) $\log_{81} 3$; f) $\log_{32} \dfrac{1}{2}$;

g) $\log_{10} 100$; h) $\log_{1/2} 2$; i) $\log_3 0$;

l) $\log_4 64$; m) $\log_5 \dfrac{1}{125}$; n) $\log_4 8$;

Risposte.

a) 0 ($\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$);

b) 1 ($\log_a a = 1, \forall a > 0, a \neq 1$);

c) -1 ($\log_a \dfrac{1}{a} = -1, \forall a > 0, a \neq 1$);

d) 3, infatti $27 = 3^3$;

e) $\dfrac{1}{4}$, infatti $3 = \sqrt[4]{81}$;

f) $-\dfrac{1}{5}$, infatti $2 = 32^{1/5}$ e $\log_a b^c = c \log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;

g) 2;

h) -1, infatti $log_{1/a} b = -\log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;

i) non esiste, infatti $a^x > 0, \forall a > 0$;

l) 3 ; m) -3 ; n)$\dfrac{3}{2}$ (scrivere 8 come $2 \cdot 4$ e applicare le proprietà dei logaritmi).

3. Scrivere le seguenti espressioni come somma di logaritmi ($a, b, c > 0$):

a) $\log \dfrac{\sqrt[4]{c^5} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[7]{a}}$

b) $\log \sqrt[4]{\dfrac{a+3b}{a+b}}$

Risposte.
a) $\dfrac{5}{4} \log c + \dfrac{1}{2} \log b - \dfrac{1}{7} \log a$;

b) $\dfrac{1}{4} \log(a+3b) - \dfrac{1}{4} \log(a+b)$.

4. Scrivere le seguenti espressioni come un unico logaritmo ($x, y, z > 0$):

a) $\log 13 - \log 26 + \dfrac{1}{2} \log 9 - 2 \log 3$;

b) $4 \log x - \dfrac{1}{2} \log y^2 + \dfrac{5}{4} \log z$.

Risposte.
a) $\log \dfrac{1}{6}$; b) $\log \dfrac{x^4 \sqrt[4]{z^5}}{y}$.

5. Dire se le seguenti uguaglianze sono false o vere:

a) $\log_{1/3}(3) = -1$;

b) $\log_{1/3}(27) = 3$;

c) $\log 6 = \log 2 \cdot \log 3$;

d) $(\log 2)^2 = \log 4$;

e) $\dfrac{\log 2}{\log 4} = \dfrac{1}{2}$;

f) $\dfrac{1}{2} \log x^2 = \log x$;

g) $\log_4 x = -\dfrac{1}{3} \log_4 \dfrac{1}{x^3}$;

h) $\log |x \cdot y| = \log |x| + \log |y|$;

i) $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$;

l) $\log \dfrac{x}{y} = \log |x| - \log |y|$;

m) $\log_7 6 < 0$.

Risposte.

a)V ;b)F (-3); c)F $(\log 6 = \log 2 + \log 3)$; d)F ; e)V;

f)F (vera solo se $x > 0$; è vera invece: $\dfrac{1}{2} \log x^2 = \log |x|$) ;

g)V (hanno entrambi significato per $x > 0$, e per tali x vale l'uguaglianza);

h)V ; i)F ;

l)F (vera solo se $\dfrac{x}{y} > 0$; è vera invece:$\log \left|\dfrac{x}{y}\right| = \log |x| - \log |y|$);

m)F $(0 < \log_7 6 < 1)$.

6. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche. Osservare che occorre la "verifica" delle soluzioni trovate.

a) $\log_3 \dfrac{x^2}{4} = 3$;

b) $\log_2 x + \log_2 (x-2) = 3$;

c) $2 \log(-x) + \log(x-3) = \log(x+1)^2$;

d) $(\log_5 x)^2 + 5 \log_5 x + 6 = 0$;

e) $\log_{1/2} |2x - 1| = 1$;

f) $3 \log_8 x - 2 = 0$;

g) $5 (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 (3x) - 1 = 0$;

Risposte.

a) $x = \pm 6\sqrt{3}$; b) $x = 4$; c) impossibile; d) $x = \dfrac{1}{25}, x = \dfrac{1}{125}$;

e) $x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$; f) $x = 4$; g) impossibile.

Metodo di risoluzione delle disequazioni esponenziali/logaritmiche.

Se $a > 1$ $\quad a^x > a^y \Leftrightarrow x > y,$

se $0 < a < 1$ $\quad a^x > a^y \Leftrightarrow x < y,$

da cui segue che $\forall x, y > 0$

se $a > 1$ $\quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y,$

se $0 < a < 1$ $\quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y.$

Inoltre si ricordi che prima di risolvere una disequazione logaritmica occorre porre il campo di esistenza (argomento del logaritmo positivo).

7. Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali.

a) $3^x < -4$; b) $5^x > 3$;

c) $2^{x+1} < 4^x$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > 2$;

e) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 < 0$; f) $10^{-x} > -2$;

g) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$; h) $\sqrt[5]{3^{x-1}} > 1$;

i) $e^x - 3e^{-x} < 2$; l) $\frac{1}{5^x} - 5^{x+1} < 4$;

m) $2^{2x} + 5\ 2^x > 0$; n) $3^x - 5\ 3^{-x} < 4$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x > \log_5 3$; c) $x > 1$; d) $x < -\frac{1}{3}$; e) $x < 0$; f) $\forall x$;
g) $x < -1, x > 0$; h) $x > 1$; i) $x < \log 3$; l) $x > -1$; m) $\forall x$; n) $x < \log_3 5$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

a) $\log_3 \frac{x^2}{4} > 3$; b) $\log_2 3x > 0$;

c) $\log_2 x + \log_2(x-2) < 3$;

d) $\log x + \log(x+2) > 0$;

e) $\log_{1/2} |2x-1| \geq 1$;

f) $3 \log_8 x - 2 > 0$;

g) $3 (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 (3x) - 3 < 0$;

h) $\log_2(x-1) - \log_4(x-1) > 2$.

Risposte.

a) $x < -6\sqrt{3}, x > 6\sqrt{3}$; b) $x > \frac{1}{3}$; c) $2 < x < 4$ (attenzione al campo di esistenza); d) $x > -1 + \sqrt{2}$;

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, x \neq \frac{1}{2}$; f) $x > 4$; g) $\frac{1}{3} < x < \sqrt[3]{3}$; h) $x > 17$.

ESERCIZI 10. Trigonometria.

Angoli e loro misura.

Due semirette a e b di comune origine O dividono il piano in due parti, ciascuna detta angolo $\widehat{ab}$. Sono noti gli angoli fondamentali: angolo nullo, angolo retto, angolo piatto, angolo giro. Con abuso di linguaggio si identifica l'angolo con la sua misura. L'angolo (orientato) $\widehat{ab}$ è per convenzione positivo se il movimento per portarsi dalla posizione iniziale a alla posizione finale b avviene in verso antiorario, negativo altrimenti.

L'angolo di un *grado* è la trecentosessantesima parte di un angolo giro. La misura in gradi dell'angolo giro è 360^o.

L'angolo di un *radiante* è quell'angolo che su una circonferenza (di centro nell'origine dell'angolo) intercetta un arco di lunghezza pari al raggio. La misura in radianti dell'angolo giro è 2π ($\pi = 3,141592...$ numero irrazionale).

Più in generale, la misura α in radianti di un angolo al centro è il rapporto

$$\alpha = \frac{l}{r},$$

dove l è la misura dell'arco sotteso dall'angolo al centro e r è il raggio della circonferenza.

Trasformazione delle misure.

Se α è la misura in radianti di un angolo e z^o la sua misura in gradi si ha:

$$\alpha : z^o = \pi : 180^o$$

(π e 180^o sono le misure in radianti e in gradi dell'angolo piatto).

1. Trasformare la seguenti misure da gradi in radianti.

a) 45^o; *b*)60^o; *c*) 90^o; *d*) 135^o; *e*) 150^o; *f*) 270^o; *g*) 540^o.

Risposte.
a) $\frac{\pi}{4}$; *b*) $\frac{\pi}{3}$; *c*) $\frac{\pi}{2}$; *d*) $\frac{3}{4}\pi$; *e*) $\frac{5}{6}\pi$; *f*) $\frac{3}{2}\pi$; *g*) 3π.

2. Trasformare la seguenti misure da radianti in gradi.
a) $\frac{2}{3}\pi$; b) $\frac{5}{12}\pi$; c) $\frac{\pi}{18}$; d) $\frac{7}{4}\pi$; e)π.

Risposte.
a) 120^o; b) 75^o; c) 10^o; d) 315^o; e) 180^o.

3. Risolvere i seguenti problemi.

a) In una circonferenza di raggio 3 m, quale angolo al centro sottende un arco di lunghezza 2 m?

b) In una circonferenza di raggio 4 m, quanto è lungo l'arco sotteso da un angolo al centro di $\frac{5}{6}\pi$?

c) In una circonferenza, un arco di lunghezza 2π m sottende un angolo di 120^o; quanto misura il raggio?

Risposte.
a) $\frac{2}{3}$ (radianti); b) $\frac{10}{3}\pi$ m.;
c) 3 m (attenzione: occorre prima trasformare i gradi in radianti).

Seno, coseno, tangente.

Sia P un punto appartenente alla circonferenza C di centro $(0,0)$ e raggio 1 (*circonferenza trigonometrica*), e sia α l'angolo positivo descritto dal semiasse positivo delle ascisse per sovrapporsi alla semiretta OP.
Allora il punto P ha coordinate

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Periodicità. Poichè la circonferenza C è lunga 2π, sommando 2π a α si fa compiere a P un giro completo e si giunge allo stesso punto P.
Quindi, per ogni α,

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi).$$

Si dice che le funzioni coseno e seno sono periodiche con periodo 2π.

Per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, si definisce la tangente di α:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

e tale funzione è periodica con periodo π :

$$\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi).$$

Relazioni trigonometriche e proprietà.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$, $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$, $\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)$, $k \in Z$;
- $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $\ -1 \le \cos\alpha \le 1$;
- se $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ il seno cresce da -1 a 1;
- se $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{3}{2}\pi$ il seno decresce da 1 a -1;
- se $0 \le \alpha \le \pi$ il coseno decresce da 1 a -1;
- se $\pi \le \alpha \le 2\pi$ il coseno cresce da -1 a 1;
- se $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ la tangente cresce da $-\infty$ a $+\infty$;
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$, $\quad \alpha, \beta, (\alpha \pm \beta) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

- in un *triangolo rettangolo*

  i) la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, oppure per il coseno dell'angolo adiacente;

  ii) la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.

4. Completare la seguente tabella:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{5}{6}\pi$			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
π	0	1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$		
$\frac{5}{4}\pi$			1
$\frac{4}{3}\pi$			
$\frac{3}{2}\pi$	1		
$\frac{5}{3}\pi$			
$\frac{7}{4}\pi$			
$\frac{11}{6}\pi$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

5. Risolvere i seguenti problemi.

a) Un cavo viene teso dal vertice di un palo, alto 20 metri, al suolo e forma con esso un angolo di 30^o; calcolare la lunghezza del cavo.

b) Un campanile proietta al suolo un'ombra lunga 30 metri; sapendo che il campanile è alto 30 metri, calcolare l'angolo formato dai raggi del sole col piano orizzontale.

c) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $10\sqrt{3}$ e il seno di un angolo interno è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{3}$; calcolare il perimetro del triangolo.

Risposte.
a) 40 metri; b) 45^o; c) $10(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$.

6. Tracciare il grafico per punti delle seguenti funzioni:

a) $y = \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$

b) $y = \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$

c) $y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

7. Verificare le seguenti identità trigonometriche.

a) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$;

b) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$;

c) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

d) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan \dfrac{x}{2}$.

8. Trovare le relazioni tra i valori $\sin\beta$ e $\sin\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\alpha, \tan\beta$ e $\tan\alpha$ nei seguenti casi:

a) $\beta = -\alpha$;

b) $\beta = \pi - \alpha$;

c) $\beta = \pi + \alpha$.

Risposte.
a) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$;

b) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$; $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$;

c) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$; $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$.

9. Trovare le relazioni tra i valori $\sin\beta$ e $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\sin\alpha$, $\tan\beta$ e $\tan\alpha$ nei seguenti casi:

a) $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$;

b) $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Risposte.
a) $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$;
$\tan(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$ $(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2})$;
b) $\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$;
$\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ $(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2})$.

10. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

a) $\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$; b) $\sin(0) = 1$;

c) $\cos 1 = 0$; d) $\sin(x^2) + \cos(x^2) = 1$;

e) $\cos(3 - \dfrac{\pi}{2}) = \sin(\pi - 3)$; f) $\sqrt{\cos 4} = \cos 2$;

g) $\sqrt{\cos^2 2} = -\cos 2$; h) $\sqrt{\sin^2 2} = \sin 2$.

Risposte.
a) V; b) F; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V.

11. Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \cos(2x+1)$; d) $y = \tan(2x)$;
e) $y = \sin^2(3x)$; f) $y = 2^{\sin x}$; g) $y = 2^{\cos x}$; h)$y = |\sin x|$.

Risposte.
a) dispari; b) pari; c) nè dispari nè pari; d) dispari; e) pari; f) nè dispari nè pari; g) pari; h) pari.

12. Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche.

a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;	b) $\cos x = 1$;
c) $\sin^2 x + \cos x = 2$;	d) $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$;
e) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$;	f) $\cos^2 x = \cos x$;
g) $\sin x + \cos x = 0$;	h) $\sin x = \cos x$;
i) $\tan x = \sin x$;	l) $\tan^2 x = 3$;
m) $2\cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$;	n) $2\sin^2 x - 1 = 0$;
o) $\sin(2x) = \cos x$;	p) $2\cos^2 x = 1$;
q) $\cos(2x) = \sin x$;	r) $\tan^2 x = 1$

Risposte ($k \in \mathbb{Z}$).

a) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi$;	b) $x = 2k\pi$;
c) impossibile;	d) $x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi, x = \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$;
e) $x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi, x = \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi$;	f) $x = 2k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$;
g) $x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$;	h) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$;
i) $x = k\pi$;	l) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$;
m) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$;	n) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$;
o) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$;	p) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$;
q) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$;	r) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

13. Supponendo $0 \leq x \leq 2\pi$, risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche.

a) $\sin x < -2$; b) $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$;

c) $\cos x > -1$; d) $\cos x > \dfrac{1}{2}$;

e) $|\sin x| > 0$; f) $\sin x \leq \cos x$;

g) $\sin x + \cos x < 0$; h) $\sin^2 x - \sin x \leq 0$.

Risposte.
a) Impossibile; b) $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$; c) $x \neq \pi$;
d) $0 \leq x < \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$; e) $x \neq 0, \pi, 2\pi$; f) $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$;
g) $\dfrac{3}{4}\pi < x < \dfrac{7}{4}\pi$; h) $0 \leq x \leq \pi$.

14. Supponendo $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche..

a) $\tan x < -1$; b) $\tan x \leq \sqrt{3}$;

c) $\tan^2 x \geq 1$; d) $\tan x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

Risposte.
a) $-\dfrac{\pi}{2} < x < -\dfrac{\pi}{4}$; b) $-\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{3}$; c) $-\dfrac{\pi}{2} < x \leq -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$; d) $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

✍ Esempio di Test

(1) Se A ha 4 elementi e B ha 3 elementi allora...

☐ *(a)* $B \subset A \times B$.

☐ *(b)* $A \subset A \times B$.

☐ *(c)* $A \times B$ ha 12 elementi.

☐ *(d)* $A \times B = B \times A$.

(2) Siano $A = \{x \in \mathbb{N}\ :\ x\ \text{ pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}\ :\ x\ \text{ divisibile per } 3\}$. Allora:

☐ *(a)* $A \subset B$.

☐ *(b)* $B \subset A$.

☐ *(c)* $A \cap B = \emptyset$.

☐ *(d)* $A \cap B \neq \emptyset$.

(3) La frazione $\left(\dfrac{1}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}\right) \cdot \dfrac{5}{3}$ è uguale a

☐ *(a)* -5

☐ *(b)* $-\dfrac{5}{18}$

☐ *(c)* $\dfrac{2}{3}$

☐ *(d)* -10

(4) Se un oggetto è in vendita con uno sconto del 20%, pagandolo 56 euro alla cassa quale era il suo prezzo prima dello sconto?

☐ *(a)* 82 euro

☐ *(b)* 70 euro

☐ *(c)* 74 euro

☐ *(d)* 98 euro

(5) Indicare la proposizione vera

☐ *(a)* $\sqrt{x^2} = |x|\,, \forall x \in \mathbb{R}$

☐ *(b)* $\sqrt{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

☐ *(c)* $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

☐ *(d)* $\sqrt{x^2} = \pm x, \forall x \in \mathbb{R}$

(6) Siano $x \neq 0, y \neq 0$; l'espressione $\dfrac{\dfrac{4x^3}{y^{-2}}}{\dfrac{8x^{-3}}{y^3}}$ è uguale a

☐ *(a)* $\dfrac{x^6y^5}{2}$

☐ *(b)* $\dfrac{x^9y^6}{2}$

☐ *(c)* $\dfrac{2y^5}{x^9}$

☐ *(d)* $\dfrac{yx^6}{2}$

(7) Per quale k reale il polinomio $2x^3 + x^2 + k$ risulta divisibile per $(x - 1)$?

☐ *(a)* 1

☐ *(b)* 3

☐ *(c)* -3

☐ *(d)* -2

(8) Siano $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$; l'espressione

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \cdot (b^2 - a^2)$$

è uguale a

☐ *(a)* $a + b$

☐ *(b)* $a - b$

☐ *(c)* $\dfrac{b}{a}$

☐ *(d)* $-a - b$

(9) Le soluzioni reali dell'equazione $(x-2)^3 = 27$ sono

☐ *(a)* $x = 5$

☐ *(b)* $x = 5, x = -1$

☐ *(c)* $x = -1$

☐ *(d)* $x = 1$

(10) Quante coppie di numeri reali sono soluzione del sistema $\begin{cases} ab & = 2 \\ a^2 + ab - 2 & = 0 \end{cases}$?

☐ *(a)* nessuna

☐ *(b)* una

☐ *(c)* due

☐ *(d)* tre

(11) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la disequazione $kx - 4x + 5 > 0$ ha soluzioni $x < \dfrac{5}{4-k}$?

☐ *(a)* $k > 4$

☐ *(b)* $k < 4$

☐ *(c)* $k \neq 4$

☐ *(d)* $k = 4$

(12) Le soluzioni della disequazione $\dfrac{3-x}{(2x-4)(x-3)} > 0$ sono

☐ *(a)* $x > 2, x \neq 3$

☐ *(b)* $2 < x < 3$

☐ *(c)* $x < 2$

☐ *(d)* $x > 2$

(13) La retta passante per il punto $P = (-3, 1)$ e parallela alla retta di equazione $x - 2y + 7 = 0$ ha equazione

☐ *(a)* $-2x + y - 4 = 0$

☐ *(b)* $2x - y - 4 = 0$

☐ *(c)* $-x + 2y - 5 = 0$

☐ *(d)* $x - 2y - 5 = 0$

(14) La parabola di equazione $y = x^2 - 3$ e la retta di equazione $y = c$ hanno due intersezioni se e solo se

☐ *(a)* $c < 3$

☐ *(b)* $c > 3$

☐ *(c)* $c < -3$

☐ *(d)* $c > -3$

(15) Sia $f(x) = 3^{x+1}$ e $g(x) = 3^x$. Allora

☐ *(a)* $g(x) = f(x) + 3$

☐ *(b)* $f(x) = g(3x)$

☐ *(c)* $g(x) = f(x + 1)$

☐ *(d)* $f(x) = g(x + 1)$

(16) Il dominio di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 2x^2}}$ è

☐ *(a)* $-2 < x < 2$

☐ *(b)* $x > 2$

☐ *(c)* $-2 \leq x \leq 2$

☐ *(d)* $x \neq \pm 2$

(17) Le soluzioni dell'equazione $3 \cdot 4^{x+1} = 192$ sono

☐ *(a)* $x = 2$

☐ *(b)* $x = 3$

☐ *(c)* $x = 4$

☐ *(d)* $x = 5$

(18) Il numero $\log_{10}(0.001)$ è uguale a

☐ *(a)* 10^{-3}

☐ *(b)* 10^{3}

☐ *(c)* -3

☐ *(d)* $-\log_{10} 3$

(19) La funzione $y = \cos x$, con $0 < x < \pi$, è

☐ *(a)* decrescente

☐ *(b)* nè crescente nè decrescente

☐ *(c)* costante

☐ *(d)* crescente

(20) Il dominio della funzione $f(x) = \log|\sin x|$ è

☐ *(a)* $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(b)* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(c)* $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(d)* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

✍ Test 1. logica e insiemi

(1) Se A ha 3 elementi e B ha 4 elementi allora...

☐ *(a)* $A \times B$ ha 12 elementi.

☐ *(b)* $A \subset A \times B$.

☐ *(c)* $B \subset A \times B$.

☐ *(d)* $A \times B = B \times A$.

(2) Sia A la proposizione "x è un numero reale positivo" e B la proposizione "$\sqrt{x}$ è un numero reale". Stabilire quale è vera :

☐ *(a)* Condizione necessaria affinché valga A è che valga B.

☐ *(b)* Condizione necessaria affinch valga B è che valga A.

☐ *(c)* Condizione necessaria e sufficiente affinché valga A è che valga B.

☐ *(d)* Condizione necessaria affinché valga B è che sia $x = 4$.

(3) Determinare quale equivalenza di proposizioni è vera:

☐ *(a)* P è un rettangolo $\Leftrightarrow$ P è un quadrilatero con lati uguali.

☐ *(b)* P è un rettangolo $\Leftrightarrow$ P è un quadrilatero con tre angoli retti.

☐ *(c)* P è un rettangolo $\Leftrightarrow$ P è un poligono con quattro angoli retti.

☐ *(d)* P è un rettangolo $\Leftrightarrow$ P è un quadrilatero con lati opposti uguali.

(4) Sia data la proposizione "ogni numero naturale è dispari e minore di 16". La sua negazione è:

☐ *(a)* qualche numero naturale è maggiore di 16.

☐ *(b)* ogni numero naturale è pari o maggiore di 15

☐ *(c)* qualche numero naturale è pari e maggiore di 15

☐ *(d)* qualche numero naturale o è pari o è maggiore di 15

(5) Sia data la proposizione “ogni giorno vado dal panettiere o in salumeria”. La sua negazione è:

☐ *(a)* qualche giorno non vado né dal panettiere né in salumeria

☐ *(b)* qualche giorno o non vado dal panettiere o non vado in salumeria

☐ *(c)* ogni giorno non vado né dal panettiere né in salumeria

☐ *(d)* ogni giorno o non vado dal panettiere o non vado in salumeria

(6) Siano A e B due proposizioni di cui si sa che “se B è vera allora A è vera” . Quale di questi affermazioni è corretta?

☐ *(a)* condizione necessaria affinché valga B è che valga A.

☐ *(b)* se B non è vera allora A non è vera.

☐ *(c)* se A è vera allora B è vera.

☐ *(d)* condizione sufficiente affinché valga B è che valga A

(7) Siano dati gli insiemi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x^2 + 4x + 4\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x + 2\}$. Allora:

☐ *(a)* $A = B$

☐ *(b)* A contiene B

☐ *(c)* $A \cap B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - x^2 = 16\}$

☐ *(d)* B contiene A

(8) Sia X un sottoinsieme proprio di Y. Quale di queste affermazioni è vera?

☐ *(a)* esiste un elemento di X che non appartiene a Y

☐ *(b)* ogni elemento di Y non appartiene a X

☐ *(c)* $X \cap Y = X \cup Y$

☐ *(d)* esiste un elemento di Y che non appartiene a X

(9) Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \ \text{ pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \ \text{ divisibile per } 4\}$. Allora:

☐ *(a)* $A \subset B$.

☐ *(b)* $B \subset A$.

☐ *(c)* $A \cup (A \cap B) = B$.

☐ *(d)* $A \cap (A \cup B) = B$.

(10) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 + x^2 > 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 + x^2 \leq 1\}$. Allora, se si denotano con A^c e B^c il complementare di A e B rispettivamente, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ *(a)* $A^c \cap B^c = A$.
- ☐ *(b)* $A \cap B = B$.
- ☐ *(c)* $A \subset B$.
- ☐ *(d)* $A^c \cap B = A^c$.

(11) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 + x^2 = 5\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 + x^2 \leq 1\}$. Allora se si denota con A^c e B^c il complementare di A e B rispettivamente, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- ☐ *(a)* $A \subset B$.
- ☐ *(b)* $A \cup B^c = A$.
- ☐ *(c)* $A^c \cap B^c = \varnothing$.
- ☐ *(d)* $A^c \cap B = B$.

(12) Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1, 2, a, b\}$?

- ☐ *(a)* 10.
- ☐ *(b)* 12.
- ☐ *(c)* 15.
- ☐ *(d)* 16.

✍ Test 2.1 Numeri reali

(1) Se è $2 \leq a \leq 4$ e $-12 \leq b \leq -8$, quale è vera?

☐ *(a)* $-1/2 \leq a \cdot b^{-1} \leq -1/6$

☐ *(b)* $1/6 \leq a \cdot b^{-1} \leq 1/2$

☐ *(c)* $-1/6 \leq a \cdot b^{-1} \leq -1/2$

☐ *(d)* $-1/3 \leq a \cdot b^{-1} \leq -1/4$

(2) Quale è vera?

☐ *(a)* $\frac{3}{2} < 1,2 < \frac{5}{3}$

☐ *(b)* $1 < 1,2 < \frac{5}{4}$

☐ *(c)* $\frac{6}{5} < 1,2 < \frac{5}{3}$

☐ *(d)* $\frac{4}{3} < 1,2 < \frac{7}{5}$

(3) Se $a \cdot b = 0$, allora

☐ *(a)* $a = 0$

☐ *(b)* $b = 0$

☐ *(c)* $(a = 0) \vee (b = 0)$

☐ *(d)* $(a = 0) \wedge (b = 0)$

(4) La frazione $\left(\dfrac{1}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} \right) \cdot \dfrac{3}{5}$ è uguale a

☐ *(a)* $\frac{15}{3}$

☐ *(b)* $-\frac{18}{5}$

☐ *(c)* $\frac{3}{2}$

☐ *(d)* -6

(5) Quale è vera?

☐ *(a)* $6538 \cdot 10^{13} = 65,38 \cdot 10^{15}$

☐ *(b)* $6538 \cdot 10^{13} = 6,538 \cdot 10^{10}$

☐ *(c)* $6538 \cdot 10^{13} = 65,38 \cdot 10^{-5}$

☐ *(d)* $6538 \cdot 10^{13} = 6,538 \cdot 10^{14}$

(6) Il prodotto dei numeri 83.456.712 e 8.145.306 è circa uguale a

☐ *(a)* $6,64 \cdot 10^{14}$

☐ *(b)* $6,64 \cdot 10^{13}$

☐ *(c)* $6,64 \cdot 10^{15}$

☐ *(d)* $6,64 \cdot 10^{12}$

(7) L'espressione $(4\sqrt{2} - 3)^2$ è uguale a

☐ *(a)* $41 - 24\sqrt{2}$

☐ *(b)* $27 - 24\sqrt{2}$

☐ *(c)* $27 + 24\sqrt{2}$

☐ *(d)* 27

(8) Sia $a = \dfrac{\sqrt{50} - 7}{2}$. Allora $\dfrac{1}{a}$ vale

☐ *(a)* $\dfrac{2}{\sqrt{50} + 7}$

☐ *(b)* $\dfrac{1}{7 - \sqrt{50}}$

☐ *(c)* $14 + 10\sqrt{2}$

☐ *(d)* $7 + \sqrt{50}$

(9) Sia $a = \dfrac{9+\sqrt{45}}{2}$. Allora $\dfrac{1}{a}$ vale

☐ *(a)* $\dfrac{9-\sqrt{45}}{2}$

☐ *(b)* $\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$

☐ *(c)* $\dfrac{2}{9-\sqrt{45}}$

☐ *(d)* $\dfrac{9+\sqrt{45}}{18}$

✍ Test 2.2 Percentuali

(1) Due paesi distano $3cm$ su una carta geografica in scala $1 : 40.000$. Quanto distano su una carta in scala $1 : 60.000$?

☐ *(a)* $1,5cm$

☐ *(b)* $5cm$

☐ *(c)* $3,5cm$

☐ *(d)* $2cm$

(2) Se un oggetto è in vendita con uno sconto del 30%, pagandolo 21 euro alla cassa quale era il suo prezzo prima dello sconto?

☐ *(a)* 30 euro

☐ *(b)* 70 euro

☐ *(c)* 24 euro

☐ *(d)* 28 euro

(3) Se in un processo chimico una grandezza q passa dal valore 1 al valore 9, di quanto è aumentata q in percentuale?

☐ *(a)* 90%

☐ *(b)* 900%

☐ *(c)* 800%

☐ *(d)* 8%

(4) Tre grandezze p, q, r sono legate dalla relazione $3p = \dfrac{1}{q \cdot r}$. Se r raddoppia, allora p diventa

☐ *(a)* $\dfrac{1}{6}$ del valore iniziale

☐ *(b)* $\dfrac{1}{2}$ del valore iniziale

☐ *(c)* $\dfrac{1}{3}$ del valore iniziale

☐ *(d)* il doppio del valore iniziale

(5) In una soluzione di alcool e acido borico l'acido borico è presente al 40%. Quanto alcool contengono 150 grammi di soluzione?

- [ ] *(a)* 90 gr.
- [ ] *(b)* 40gr.
- [ ] *(c)* 60gr.
- [ ] *(d)* 120gr.

(6) In una confezione di 240 kg di mele e pere, ci sono 60 kg di pere. Quale è la percentuale presente di mele?

- [ ] *(a)* circa il 13%
- [ ] *(b)* 25%
- [ ] *(c)* 55%
- [ ] *(d)* 75%

(7) In una cultura è presente una popolazione di 25 milioni di batteri, dei quali 200.000 sono di tipo A. Quale è la percentuale di batteri di tipo A rispetto all'intera popolazione?

- [ ] *(a)* 8%
- [ ] *(b)* $1,25\%$
- [ ] *(c)* $0,8\%$
- [ ] *(d)* $12,5\%$

(8) In un processo chimico due grandezze p e q sono inversamente proporzionali; se p diminuisce del 30%, allora di quale percentuale aumenta q ?

- [ ] *(a)* 52% circa
- [ ] *(b)* 70% circa
- [ ] *(c)* 43% circa
- [ ] *(d)* 30% circa

✍ Test 3. Proprietà delle potenze

(1) $6^4 + 6^4 =$

- [ ] *(a)* $2^5 \cdot 3^4$
- [ ] *(b)* $2^4 \cdot 3^5$
- [ ] *(c)* 6^8
- [ ] *(d)* 12^4

(2) $3^4 \cdot 3^5 =$

- [ ] *(a)* 9^9
- [ ] *(b)* 3^{20}
- [ ] *(c)* 9^{20}
- [ ] *(d)* 3^9

(3) Indicare la proposizione vera

- [ ] *(a)* $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- [ ] *(b)* $\sqrt{x^2} = \pm x, \forall x \in \mathbb{R}$
- [ ] *(c)* $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- [ ] *(d)* $\sqrt{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(4) L'espressione $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^{18}$ è uguale a

- [ ] *(a)* -5^3
- [ ] *(b)* 5^6
- [ ] *(c)* non esiste
- [ ] *(d)* -5^6

(5) L'espressione $\dfrac{3 \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot \left(10^{-2}\right)^{-3}}{10^{-5}}$ è uguale a

- [ ] *(a)* $2,4 \cdot 10^4$
- [ ] *(b)* $2,4 \cdot 10^5$
- [ ] *(c)* $24 \cdot 10^{-7}$
- [ ] *(d)* $2,4 \cdot 10^3$

(6) Sia $a > 0$. L'espressione $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}a^{-3}}{\sqrt[6]{a^4}\sqrt[3]{a}}$ vale

- ☐ *(a)* $a^{-10/3}$
- ☐ *(b)* $a^{3/4}$
- ☐ *(c)* $a^{-4/3}$
- ☐ *(d)* a^{-1}

(7) Quale è vera?

- ☐ *(a)* $\sqrt[5]{a}\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[10]{a^2}\sqrt{b}$, per ogni $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$
- ☐ *(b)* $\sqrt[5]{a}\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[15]{a^3}\sqrt{b}$, per ogni $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$
- ☐ *(c)* $\sqrt[5]{a^{20}}\sqrt[6]{b^2} = a^4\sqrt{b^3}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
- ☐ *(d)* $\sqrt{\sqrt{a^4}} = a$, per ogni $a \in \mathbb{R}$

(8) La frazione $\dfrac{\dfrac{8x^{-3}}{y^3}}{\dfrac{4x^3}{y^{-2}}}$ è uguale a

- ☐ *(a)* $\dfrac{2}{x^9y^6}$
- ☐ *(b)* $\dfrac{x^9}{2y^5}$
- ☐ *(c)* $\dfrac{2}{yx^6}$
- ☐ *(d)* $\dfrac{2}{x^6y^5}$

(9) Quale delle seguenti è vera?

- ☐ *(a)* $\sqrt{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[5]{ab}$, per ogni $a > 0, b > 0$
- ☐ *(b)* $\sqrt{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3b^2}$, per ogni $a > 0, b > 0$
- ☐ *(c)* $\sqrt{a^2(a^2+1)} = a\sqrt{a^2+1}$, per ogni a reale
- ☐ *(d)* $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{a}$, per ogni $a > 0$

(10) Stabilire quale proposizione è falsa

☐ *(a)* $\forall a \in \mathbb{R}, a^{2n} > 0, \forall n$ intero positivo

☐ *(b)* $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a^n \neq 0, \forall n$ intero positivo

☐ *(c)* $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a^0 = 1$

☐ *(d)* $0^n = 0, \forall n$ intero positivo

(11) Stabilire quale proposizione è vera, comunque si scelgano a e b in $\mathbb{R}$ e n in $\mathbb{N}$.

☐ *(a)* Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $a^{-2} < b^{-2}$

☐ *(b)* Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

☐ *(c)* $[(-a^n)^n]^2 = a^{2n^2}$

☐ *(d)* Se $a \neq 0$, allora $(a^{-n} - a^{-n})^0 = 1$

✍ Test 4. Polinomi

(1) Per quale k reale il polinomio $2x^3 + 2x^2 + k$ risulta divisibile per $(x - 1)$?

☐ *(a)* 2

☐ *(b)* 4

☐ *(c)* -4

☐ *(d)* -6

(2) Determinare le radici razionali negative del polinomio $x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2$.

☐ *(a)* -1

☐ *(b)* $-\dfrac{1}{2}$

☐ *(c)* -2

☐ *(d)* non esistono radici razionali negative.

(3) Nell'insieme dei numeri reali $x^4 + 1$ si scompone nei seguenti fattori:

☐ *(a)* $(x^2 + \sqrt{2}x - 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

☐ *(b)* $(x^2 - x + \sqrt{2})(x^2 + x - \sqrt{2})$

☐ *(c)* $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

☐ *(d)* non si scompone non avendo radici reali

(4) Il M.C.D. (massimo comun divisore) dei polinomi:

$$A(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8, \quad B(x) = x^3 + 2x^2, \quad C(x) = x^2 + 3x + 2$$

è:

☐ *(a)* $(x + 1)(x + 2)$

☐ *(b)* $(x + 2)$

☐ *(c)* $(x + 1)$

☐ *(d)* $x^2(x + 1)(x + 2)$

(5) Il m.c.m. (minimo comune multiplo) dei polinomi:

$$A(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8, \quad B(x) = x^3 + 2x^2, \quad C(x) = x^2 + 3x + 2$$

è:

☐ *(a)* $x(x+2)(x-1)^2$

☐ *(b)* $x^2(x+1)(x+2)^3$

☐ *(c)* $(x-2)^3(x+1)$

☐ *(d)* $x^3(x-1)(x-2)$

(6) Siano $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$; l'espressione

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \cdot (a^2 - b^2)$$

è uguale a

☐ *(a)* $a + b$

☐ *(b)* $a - b$

☐ *(c)* $\dfrac{b}{a}$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(7) Siano $x \neq 0, x \neq \pm y$; l'espressione

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} \cdot \frac{\dfrac{x^2}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{y^2}{(x-y)^2}}$$

è uguale a

☐ *(a)* $\dfrac{x+y}{x-y}$

☐ *(b)* 1

☐ *(c)* $x + y$

☐ *(d)* $x - y$

(8) Siano $\dfrac{a+b}{a-b} > 0, a \neq b$; l'espressione

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}}$$

è uguale a

☐ *(a)* 1

☐ *(b)* $\sqrt[5]{\dfrac{a+b}{a-b}}$

☐ *(c)* $\sqrt[6]{\dfrac{a+b}{a-b}}$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(9) Sia $a > 0$; l'espressione

$$\sqrt{a\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}\sqrt[3]{a^2}}}$$

è uguale a

☐ *(a)* 1

☐ *(b)* $a\sqrt[5]{a^2}$

☐ *(c)* $\sqrt[15]{a^4}$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(10) L'espressione $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ è uguale a

☐ *(a)* $|x-2|$

☐ *(b)* $x-2$

☐ *(c)* $2-x$

☐ *(d)* $|x|$

(11) L'espressione $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ è uguale a

☐ *(a)* $|x-1|$

☐ *(b)* $x-1$

☐ *(c)* $1-x$

☐ *(d)* $|x+3|$

(12) L'espressione $\sqrt[4]{x^6 - 2x^5 + x^4}$ è uguale a

☐ *(a)* $\sqrt{x^3\,(x^3 - x)}$

☐ *(b)* $x(x-1)^{1/2}$

☐ *(c)* $x\sqrt{|x-1|}$

☐ *(d)* $|x|\,\sqrt{|x-1|}$

✍ Test 5.1 Equazioni razionali e sistemi

(1) L'equazione $ax + b = 0$, con le condizioni $a = 0$ e $b = 0$

☐ *(a)* ha infinite soluzioni

☐ *(b)* non ha soluzione

☐ *(c)* ha soluzione $x = -\dfrac{b}{a}$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(2) L'equazione $a(x - 1) + 3x = 0$

☐ *(a)* ha infinite soluzioni se $a = -3$

☐ *(b)* ha una soluzione se $a = -3$

☐ *(c)* ha una soluzione se $a \neq -3$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(3) L'equazione $2x^2 + 2kx + k - 1 = 0$ ha radici la cui somma vale 4 per

☐ *(a)* $k = 4$

☐ *(b)* $k = -2$

☐ *(c)* $k = 2$

☐ *(d)* $k = -4$

(4) L'equazione $3x^2 + 2kx + k - 1 = 0$ ha radici il cui prodotto vale 1 per

☐ *(a)* $k = 4$

☐ *(b)* $k = -2$

☐ *(c)* $k = 2$

☐ *(d)* $k = -4$

(5) Un'equazione di secondo grado a coefficienti interi che ha soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{2}{3}$ è:

☐ *(a)* $3x^2 - 4x - 4 = 0$

☐ *(b)* $3x^2 - 8x + 4 = 0$

☐ *(c)* non esiste

☐ *(d)* $3x^2 + 4x - 4 = 0$

(6) Le soluzioni reali dell'equazione $(x-1)^3 = 27$ sono

☐ *(a)* $x = 4, x = -2$

☐ *(b)* $x = 4$

☐ *(c)* $x = -2$

☐ *(d)* $x = -4$

(7) Le soluzioni reali dell'equazione $(x+1)^4 - 16 = 0$ sono

☐ *(a)* $x = 1, x = -3$

☐ *(b)* $x = 1$

☐ *(c)* l'equazione non ha soluzioni reali

☐ *(d)* $x = 3, x = -1$

(8) Le soluzioni reali dell'equazione $2x^4 - 2x^2 + 5 = 0$ sono

☐ *(a)* $x = 1, x = -1$

☐ *(b)* $x = \frac{5}{2}$

☐ *(c)* non ha soluzioni reali

☐ *(d)* $x = -5, x = -1$

(9) Le soluzioni reali dell'equazione $(x-2)^6 = (2x-1)^6$ sono

☐ *(a)* $x = -1$

☐ *(b)* $x = \pm 1$

☐ *(c)* non ha soluzioni reali

☐ *(d)* $x = -5, x = -1$

(10) Le soluzioni dell'equazione $x^4 + x^2 - 2 = 0$ sono

- ☐ *(a)* le stesse dell'equazione $x^2 - 1 = 0$
- ☐ *(b)* diverse dalle soluzioni dell'equazione $x^2 - 1 = 0$
- ☐ *(c)* le stesse dell'equazione $(x+1)^2 = 0$
- ☐ *(d)* non ha soluzioni reali

(11) Quante coppie di numeri reali sono soluzione del sistema $\begin{cases} ab & = 1 \\ a^2 + ab - 1 & = 0 \end{cases}$

- ☐ *(a)* nessuna
- ☐ *(b)* una
- ☐ *(c)* due
- ☐ *(d)* tre

(12) Quante coppie di numeri reali sono soluzione del sistema $\begin{cases} a + b & = 1 \\ a^2 + ab - 1 & = 0 \end{cases}$

- ☐ *(a)* nessuna
- ☐ *(b)* una
- ☐ *(c)* due
- ☐ *(d)* tre

(13) Il sistema di equazioni $\begin{cases} ka - b & = 2 \\ 2a + b & = 1 \end{cases}$ con a e b reali e k parametro reale:

- ☐ *(a)* ha sempre una e una sola soluzione
- ☐ *(b)* ha infinite soluzioni se $k = 2$
- ☐ *(c)* non ha mai soluzione
- ☐ *(d)* non ha soluzioni se $k = -2$

✍ Test 5.2 Equazioni col modulo e irrazionali

(1) Il numero delle soluzioni reali della equazione $|x^2 - 4x + 1| = 3$ è

☐ *(a)* 0

☐ *(b)* 1

☐ *(c)* 2

☐ *(d)* 3

(2) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 4x + 1 = |4 - x|\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ (4x+1)^2 = (4-x)^2\right\}$. Allora

☐ *(a)* $A = B$

☐ *(b)* $A \subset B$

☐ *(c)* $B \subset A$

☐ *(d)* $A \cap B = \varnothing$

(3) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3x + 1 = |3 - x|\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ |3x + 1| = |3 - x|\}$. Allora

☐ *(a)* $A \subset B$

☐ *(b)* $A = B$

☐ *(c)* $B \subset A$

☐ *(d)* $A \cap B = \varnothing$

(4) L'equazione $(x - 2)^2 = (3x - 1)^2$ è equivalente alla equazione

☐ *(a)* $|3x - 1| = x - 2$

☐ *(b)* $3x - 1 = |x - 2|$

☐ *(c)* $3x - 1 = x - 2$

☐ *(d)* $|3x - 1| = |x - 2|$

(5) Il numero delle soluzioni reali della equazione $|x-1| = 3\,|x|$ è

☐ *(a)* 0

☐ *(b)* 1

☐ *(c)* 2

☐ *(d)* 3

(6) L'equazione $x^3 = \sqrt{(2-2x)^3}$

☐ *(a)* non ha soluzioni reali

☐ *(b)* ha solo la soluzione $x = -1 + \sqrt{3}$

☐ *(c)* ha le due soluzioni $x = -1 \pm \sqrt{3}$

☐ *(d)* ha le stesse soluzioni dell'equazione $\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)^4 = 0$

(7) Le soluzioni dell'equazione $x = 3\sqrt{x}$ sono

☐ *(a)* $x = 0$

☐ *(b)* $x = 9$

☐ *(c)* $x = \sqrt{3}$

☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(8) Le soluzioni dell'equazione $2x = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ sono

☐ *(a)* $x = 3\sqrt{2}$

☐ *(b)* $x = 1$

☐ *(c)* $x = -3, x = 1$

☐ *(d)* non ha soluzioni reali

(9) Le soluzioni dell'equazione $\sqrt{x-2} = x\sqrt{x-2}$ sono

☐ *(a)* $x = 2$

☐ *(b)* $x = 2$ e $x = 1$

☐ *(c)* $x = 1$ e $x = 0$

☐ *(d)* $x = 2$ e $x = 0$

(10) L'equazione $\sqrt{x-2} = 3\sqrt{x}$

☐ *(a)* ha soluzione $x = \dfrac{1}{4}$

☐ *(b)* è equivalente all'equazione $x - 2 = 9x$

☐ *(c)* non ha soluzioni reali

☐ *(d)* è equivalente all'equazione $|x-2| = 9\,|x|$

(11) Il numero delle soluzioni reali della equazione $\sqrt[3]{2x^2-1} = -1$ è

☐ *(a)* 0

☐ *(b)* 1

☐ *(c)* 2

☐ *(d)* 3

✍ Test 6. Disequazioni algebriche e sistemi

(1) Sia h è un numero reale negativo. Allora $hx > 3(x-1)$ ha soluzioni

☐ *(a)* $x > 3\dfrac{x-1}{h}$

☐ *(b)* $x < \dfrac{3}{3-h}$

☐ *(c)* $\forall x$

☐ *(d)* $x < \dfrac{-1}{h-3}$

(2) Per quali $h \in R$ la disequazione $hx - 4x + 5 > 0$ ha soluzioni $x < \dfrac{-5}{h-4}$

☐ *(a)* $h > 4$

☐ *(b)* $h < 4$

☐ *(c)* $h \neq 4$

☐ *(d)* $h = 4$

(3) Se $(a+b)^2 < a^2 + c$, con a, b, c numeri reali diversi da zero, allora $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{c}{a^2}$ è

☐ *(a)* minore di 0

☐ *(b)* minore di $-\dfrac{b}{a}$

☐ *(c)* minore di $-2\dfrac{b}{a}$

☐ *(d)* maggiore di $2\dfrac{b}{a}$

(4) Sia $h < 0$; Per quali valori di x si ha $\dfrac{h-2}{3-x} > 0$?

☐ *(a)* $x > 3$

☐ *(b)* $x \neq 3$

☐ *(c)* $x > 5 - h$

☐ *(d)* $x < 3$

(5) Se $0 < b < c < 3a$, allora $\dfrac{a}{b}$ è maggiore di

- ☐ *(a)* $\dfrac{c}{3b}$
- ☐ *(b)* $\dfrac{a}{c}$
- ☐ *(c)* $\dfrac{b}{3c}$
- ☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(6) Le soluzioni positive della disequazione $\dfrac{2x^2-4}{x+1} > 0$ sono

- ☐ *(a)* $0 < x < 2$
- ☐ *(b)* $x > 2$
- ☐ *(c)* $x > \sqrt{2}$
- ☐ *(d)* $0 < x < \sqrt{2}$

(7) Le soluzioni negative della disequazione $\dfrac{1}{(2x^2-4)\,(x-1)} > 0$ sono

- ☐ *(a)* $x < -\sqrt{2}, -1 < x < 0$
- ☐ *(b)* $-\sqrt{2} < x < 0$
- ☐ *(c)* $x < -\sqrt{2}$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni negative

(8) Le soluzioni della disequazione $\dfrac{1-x}{(2x-4)\,(x-1)} > 0$ sono

- ☐ *(a)* $x < 2, x \neq 1$
- ☐ *(b)* $1 < x < 2$
- ☐ *(c)* $x < 1$
- ☐ *(d)* $x > 2$

(9) Il sistema $\begin{cases} x^2 - 8x > 0 \\ x^2 - 2x + 4 \leq 0 \end{cases}$ ha soluzioni

☐ *(a)* il sistema è impossibile

☐ *(b)* $x = -2$

☐ *(c)* $x < 0, x > 8$

☐ *(d)* $x > -2$

(10) Il sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} > 0 \\ x + 4 > 7 \\ (x-2)^2 < 4 \end{cases}$ ha soluzioni

☐ *(a)* $0 < x < 4$

☐ *(b)* $x < 0, x > 4$

☐ *(c)* $3 < x < 4$

☐ *(d)* il sistema è impossibile

(11) $-1 < \dfrac{1}{x} - 2 < 1$ se e solo se

☐ *(a)* $x < 0, x > 1$

☐ *(b)* $x < 0, \dfrac{1}{3} < x < 3$

☐ *(c)* $x \neq 0$

☐ *(d)* $\dfrac{1}{3} < x < 1$

(12) $|3x| - 2 < 1$ se e solo se

☐ *(a)* $x < 3$

☐ *(b)* $0 \leq x < 1$

☐ *(c)* $-1 < x < 1$

☐ *(d)* $x \geq 0$

(13) $\sqrt{2x-3}-7<-2$ se e solo se

☐ *(a)* $x<14$

☐ *(b)* $x \geq \dfrac{3}{2}$

☐ *(c)* $\dfrac{3}{2} \leq x < 14$

☐ *(d)* non ha soluzioni

(14) Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-4} \geq |-2|$ sono

☐ *(a)* $\forall x$

☐ *(b)* $x \leq -2\sqrt{2}, x \geq 2\sqrt{2}$

☐ *(c)* $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

☐ *(d)* la disequazione non ha soluzioni

✍ Test 7. Geometria analitica

(1) L'equazione della retta passante per i punti $P = (-2, 3)$ e $Q = (-2, 5)$ è

☐ *(a)* $x + 2 = 0$

☐ *(b)* $x - 2 = 0$

☐ *(c)* $y - 3 = 0$

☐ *(d)* non esiste

(2) La retta passante per il punto $P = (1, 3)$ e parallela alla retta di equazione $x - 2y + 7 = 0$ ha equazione

☐ *(a)* $2x - y - 4 = 0$

☐ *(b)* $-x + 2y - 5 = 0$

☐ *(c)* $-2x + y - 4 = 0$

☐ *(d)* $x - 2y - 5 = 0$

(3) La retta passante per il punto $A = (-5, -1)$ e perpendicolare alla retta passante per i punti $P = (0, 3)$ e $Q = (-2, 0)$ ha equazione

☐ *(a)* $2x + 3y + 13 = 0$

☐ *(b)* $2x - 3y + 7 = 0$

☐ *(c)* $-2x - 3y - 11 = 0$

☐ *(d)* $3x - 2y + 13 = 0$

(4) L'equazione della circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = 4$ è

☐ *(a)* $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

☐ *(b)* $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

☐ *(c)* $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

☐ *(d)* $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 21 = 0$

(5) L'equazione $9x^2 - 9y^2 + 6y - 1 = 0$ rappresenta

☐ *(a)* una circonferenza

☐ *(b)* una ellisse

☐ *(c)* due rette incidenti

☐ *(d)* due rette parallele

(6) La circonferenza di equazione $x^2+y^2-1 = 0$ e la retta di equazione $y-x-\sqrt{2} = 0$

☐ *(a)* non hanno punti di intersezione

☐ *(b)* si intersecano in un punto

☐ *(c)* si intersecano in due punti

☐ *(d)* si intersecano in tre punti

(7) La parabola di equazione $y = \frac{1}{3}x^2$ e la retta di equazione $y = 2x + c$ hanno due intersezioni se e solo se

☐ *(a)* $c < 3$

☐ *(b)* $c > 3$

☐ *(c)* $c < -3$

☐ *(d)* $c > -3$

(8) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 8x + 4y < 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 2x + y = 0\}$. Dire quale delle seguenti proposizioni è vera.

☐ *(a)* $A \subset B$

☐ *(b)* $B \subset A$

☐ *(c)* $A \cap B = \emptyset$

☐ *(d)* $A \cap B \neq \emptyset$

(9) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 4x + 4y < 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$
Dire quale delle seguenti proposizioni è vera.

- ☐ *(a)* $A \subset B$
- ☐ *(b)* $A \cap B = \emptyset$
- ☐ *(c)* $A \cap B \neq \emptyset$
- ☐ *(d)* nessuna delle precedenti

(10) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 + 4x + 4y < 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y - x^2 > 0\}$.
Dire quale delle seguenti proposizioni è vera.

- ☐ *(a)* $A \subset B$
- ☐ *(b)* $B \subset A$
- ☐ *(c)* $A \cap B = \emptyset$
- ☐ *(d)* $A \cap B \neq \emptyset$

(11) La parabola di equazione $y - x^2 + 2x - 1 = 0$ e la retta di equazione $y - x + 5 = 0$

- ☐ *(a)* non hanno punti di intersezione
- ☐ *(b)* si intersecano in un punto
- ☐ *(c)* si intersecano in due punti
- ☐ *(d)* si intersecano in tre punti

(12) L'iperbole di equazione $x^2 - 2y^2 = 1$ e la retta di equazione $y - x + 1 = 0$

- ☐ *(a)* non hanno punti di intersezione
- ☐ *(b)* si intersecano in un punto
- ☐ *(c)* si intersecano in due punti
- ☐ *(d)* si intersecano in tre punti

(13) L'area del quadrato inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ vale

- ☐ *(a)* 24
- ☐ *(b)* 28
- ☐ *(c)* 32
- ☐ *(d)* 36

(14) Il perimetro del quadrato circoscritto nella circonferenza di centro $C = (0, 0)$ e passante per il punto $P = (3, 0)$ vale

☐ *(a)* 24

☐ *(b)* 28

☐ *(c)* 32

☐ *(d)* 36

✍ Test 8. Funzioni reali

(1) Sia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. Allora

- ☐ *(a)* $g(x) = f(x+1)$
- ☐ *(b)* $g(x) = f(x-1)$
- ☐ *(c)* $g(x) = f(x) + 2$
- ☐ *(d)* $g(x) = f(2x)$

(2) Sia $f(x) = 2^{x+1}$ e $g(x) = 2^x$. Allora

- ☐ *(a)* $g(x) = f(x+1)$
- ☐ *(b)* $f(x) = g(x+1)$
- ☐ *(c)* $g(x) = f(x) + 2$
- ☐ *(d)* $f(x) = g(2x)$

(3) Sia $f(x) = \dfrac{1-x^2}{4+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{-7-3x^2}{4+x^2}$. Allora

- ☐ *(a)* $g(x) = f(x) + 1$
- ☐ *(b)* $g(x) = f(x) - 2$
- ☐ *(c)* $g(x) = 3f(x)$
- ☐ *(d)* $g(x) = f(x-2)$

(4) Sia $f(x) = \dfrac{1-x^2}{4+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{-5-3x}{4+x}$. Allora

- ☐ *(a)* f è pari e g è dispari
- ☐ *(b)* f non è pari e g è dispari
- ☐ *(c)* f è pari e g non è dispari
- ☐ *(d)* f non è pari e g non è dispari

(5) Il dominio di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ è

- ☐ *(a)* $x > 2$
- ☐ *(b)* $-2 < x < 2$
- ☐ *(c)* $-2 \leq x \leq 2$
- ☐ *(d)* $x \neq \pm 2$

(6) Il dominio di $f(x) = \log_2(x^2 - x + 1)$ è

- ☐ *(a)* $-2 \leq x \leq 2$
- ☐ *(b)* $x > 1$
- ☐ *(c)* $\forall x$
- ☐ *(d)* $x < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, x > \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(7) Il dominio di $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1} + \log_{10} x$ è

- ☐ *(a)* $x < -1, x > 1$
- ☐ *(b)* $x \neq \pm 1$
- ☐ *(c)* $x > 0$
- ☐ *(d)* $x > 0, x \neq 1$

(8) Sia k un numero reale. I grafici delle funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = k$ hanno due intersezioni distinte se e solo se

- ☐ *(a)* $k > -1$
- ☐ *(b)* $k = \pm 1$
- ☐ *(c)* $k \geq -1$
- ☐ *(d)* $k < 1$

(9) La seguente funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \\ 2^x & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ è

- ☐ *(a)* non crescente
- ☐ *(b)* non decrescente
- ☐ *(c)* crescente
- ☐ *(d)* nè crescente, nè decrescente

(10) La seguente funzione $f(x) = \begin{cases} -x & , \text{ se } x < 0 \\ x - 3 & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ è

- ☐ *(a)* nè crescente, nè decrescente
- ☐ *(b)* crescente
- ☐ *(c)* decrescente
- ☐ *(d)* non crescente

✍ Test 9.1 Equazioni esponenziali e logaritmiche

(1) Le soluzioni dell'equazione $3^{2(x-1)} = 81$ sono

☐ *(a)* $x = 0$

☐ *(b)* $x = 4$

☐ *(c)* $x = 3$

☐ *(d)* $x = 5$

(2) Le soluzioni dell'equazione $3^{2x} = 7$ sono

☐ *(a)* $x = \log_7 \frac{3}{2}$

☐ *(b)* $x = \frac{1}{2} \log_3 7$

☐ *(c)* $x = \log_3 \frac{7}{2}$

☐ *(d)* $x = \log_7 \sqrt{3}$

(3) Le soluzioni dell'equazione $3^{2x+1} - 3^{2x-1} = 16$ sono

☐ *(a)* $x = \log_3 6$

☐ *(b)* $x = \frac{1 + \log_3 4}{2}$

☐ *(c)* $x = \frac{16}{3} \log_3 2$

☐ *(d)* $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) Le soluzioni dell'equazione $3^x - 5 \cdot 3^{-x} = 4$ sono

☐ *(a)* $x = \log_3 5$

☐ *(b)* $x_1 = 0$, $x_2 = \log_3 5$

☐ *(c)* $x = \log_5 3$

☐ *(d)* nessuna soluzione

(5) Quante soluzioni ha l'equazione $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\frac{125}{27}\right)^{x+1}$

- ☐ *(a)* nessuna
- ☐ *(b)* una
- ☐ *(c)* due
- ☐ *(d)* tre

(6) Quale delle seguenti espressioni ha significato?

- ☐ *(a)* $\log_2 0$
- ☐ *(b)* $\log_3 1$
- ☐ *(c)* $\log_3(-3)$
- ☐ *(d)* $\log_{(-4)} 2$

(7) Il numero $\log_{10}(0.0001)$ è uguale a

- ☐ *(a)* 10^{-4}
- ☐ *(b)* -4
- ☐ *(c)* 10^4
- ☐ *(d)* $-\log_{10} 4$

(8) Se $c = \log_{10}(99.832.780.320)$ allora

- ☐ *(a)* $8 < c < 9$
- ☐ *(b)* $9 < c < 10$
- ☐ *(c)* $10 < c < 11$
- ☐ *(d)* $11 < c < 12$

(9) Per quale numero reale positivo r vale $\log_2 \frac{r^2}{4} = 3$?

- ☐ *(a)* $4\sqrt{2}$
- ☐ *(b)* 6
- ☐ *(c)* $2 + 2\sqrt{2}$
- ☐ *(d)* $2\sqrt{3}$

(10) Per quale numero reale r vale $4^{\frac{1}{2}r-1} = 64$?

- [ ] *(a)* 5
- [ ] *(b)* 4
- [ ] *(c)* 8
- [ ] *(d)* 6

(11) Per quale numero reale r, positivo e diverso da 1, vale $\log_r \sqrt[5]{16} = \dfrac{4}{5}$?

- [ ] *(a)* 5
- [ ] *(b)* 4
- [ ] *(c)* 8
- [ ] *(d)* 2

(12) L'equazione $3 \cdot 7^x + 7^{x-1} = 154$ ha soluzione

- [ ] *(a)* $x = 1$
- [ ] *(b)* $x = -1$
- [ ] *(c)* $x = 2$
- [ ] *(d)* $x = -2$

(13) L'equazione $5^{x+2}2^x = 2500$ ha soluzione

- [ ] *(a)* $x = 1$
- [ ] *(b)* $x = 2$
- [ ] *(c)* $x = 3$
- [ ] *(d)* $x = 4$

(14) Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni valore reale di x ?

- [ ] *(a)* $2^x + 2^x = 2^{2x}$
- [ ] *(b)* $81^x = (3^x)^4$
- [ ] *(c)* $3^2 \cdot 3^{2x} = 81^x$
- [ ] *(d)* $2^{x^2} - 4 \cdot 2^x = 2^{x^2-2-x}$

(15) Quanto vale $\log_9 27$?

☐ *(a)* Non esiste

☐ *(b)* $\frac{3}{2}$

☐ *(c)* $\sqrt{2}$

☐ *(d)* -2

☐ *(e)* $\frac{2}{3}$

(16) Supponendo che sia $\log_{10} 2 = 0,301$, quanto vale $\log_{10}(20000)$?

☐ *(a)* $4,301$

☐ *(b)* $1,204$

☐ *(c)* 301

☐ *(d)* $2,301$

(17) Quale delle seguenti affermazioni è vera ?

☐ *(a)* $0 < \log_{10} 9 < 1$

☐ *(b)* $-1 < \log_{10} 9 < 0$

☐ *(c)* $1 < \log_{10} 9 < 10$

☐ *(d)* $-2 < \log_{10} 9 < -1$

(18) Sia $c = \log_2 100$. Allora

- ☐ *(a)* $3 < c < 4$
- ☐ *(b)* $4 < c < 5$
- ☐ *(c)* $5 < c < 6$
- ☐ *(d)* $6 < c < 7$

(19) Quante soluzioni ha l'equazione $10^x + x = -2$

- ☐ *(a)* nessuna soluzione
- ☐ *(b)* una soluzione
- ☐ *(c)* due soluzioni
- ☐ *(d)* tre soluzioni

✍ Test 9.2 Disequazioni esponenziali e logaritmiche

(1) Le soluzioni della disequazione $3^{2x} > 5$ sono

☐ *(a)* $x > \log_5 \frac{3}{2}$

☐ *(b)* $x > \log_3 \sqrt{5}$

☐ *(c)* $x < \log_3 \frac{5}{2}$

☐ *(d)* $x > \log_5 \sqrt{3}$

(2) Le soluzioni della disequazione $\log_2 \frac{r}{4} > 3$ sono

☐ *(a)* $r > 2^2$

☐ *(b)* $r > 2^3$

☐ *(c)* $r > 2^4$

☐ *(d)* $r > 2^5$

(3) Le soluzioni della disequazione $3^{2x} - 4 \cdot 3^x < 0$ sono

☐ *(a)* $x > 1$

☐ *(b)* $x < \log_3 4$

☐ *(c)* $\forall x$

☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(4) Le soluzioni della disequazione $5^{2x} - 5^{x+2} > 0$ sono

☐ *(a)* $x > 2$

☐ *(b)* $x < 1$

☐ *(c)* $\forall x$

☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(5) Le soluzioni della disequazione $5^{2x} - 5^x > -1$ sono

- ☐ *(a)* $x > 2$
- ☐ *(b)* $x < 1$
- ☐ *(c)* $\forall x$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(6) Le soluzioni della disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^{2r} + 2^{2r} < 0$ sono

- ☐ *(a)* $r > 2$
- ☐ *(b)* $r < 0$
- ☐ *(c)* $r < 2$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(7) Le soluzioni della disequazione $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} > 5$ sono

- ☐ *(a)* $x > 0$
- ☐ *(b)* $x > -\frac{1}{3}$
- ☐ *(c)* $x < \frac{1}{3}$
- ☐ *(d)* $x < -\frac{1}{3}$

(8) Le soluzioni della disequazione $4^x - 4^{x+2} > 1$ sono

- ☐ *(a)* $x > 2$
- ☐ *(b)* $x < 1$
- ☐ *(c)* $\forall x$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(9) Le soluzioni della disequazione $4^x + 4^{x+1} > 20$ sono

- ☐ *(a)* $x > 1$
- ☐ *(b)* $x < 2$
- ☐ *(c)* $\forall x$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni

(10) Le soluzioni della disequazione $\log_2(x+1) + 3 > 0$ sono

- ☐ *(a)* $x > -\dfrac{7}{8}$
- ☐ *(b)* $x < \dfrac{1}{8}$
- ☐ *(c)* $x > 1$
- ☐ *(d)* non ci sono soluzioni

✍ Test 10. Trigonometria

(1) In una circonferenza, un arco di lunghezza π metri sottende un angolo di 30^o. Quanto misura il raggio?

☐ *(a)* 3 metri

☐ *(b)* 6 metri

☐ *(c)* 4 metri

☐ *(d)* π metri

(2) Quante soluzioni ha l'equazione $\sin x = \frac{2}{\pi}x$?

☐ *(a)* 0

☐ *(b)* 3

☐ *(c)* 2

☐ *(d)* infinite

(3) Supponendo $-\pi < x < 2\pi$, quante soluzioni ha l'equazione $\cos x = \frac{1}{3}$?

☐ *(a)* 0

☐ *(b)* 1

☐ *(c)* 3

☐ *(d)* 5

(4) La funzione $y = \cos x$, con $-\pi < x < 0$, è

☐ *(a)* crescente

☐ *(b)* decrescente

☐ *(c)* nè crescente nè decrescente

☐ *(d)* non crescente

(5) Le soluzioni della equazione $\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ sono

☐ *(a)* $x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

☐ *(b)* $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

☐ *(c)* l'equazione non ha soluzioni

☐ *(d)* $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(6) Le soluzioni della disequazione $\sin^2 x + 3 < 0$ sono

☐ *(a)* infinite

☐ *(b)* nessuna

☐ *(c)* 3

☐ *(d)* 2

(7) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ è

☐ *(a)* $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(b)* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(c)* $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(d)* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(8) Il dominio della funzione $f(x) = \log|\cos x|$ è

☐ *(a)* $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(b)* $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(c)* $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(d)* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(9) La funzione $f(x) = \sin^3 x$ è

☐ *(a)* pari

☐ *(b)* dispari

☐ *(c)* nè pari nè dispari

☐ *(d)* crescente

(10) La funzione $f(x) = \cos(2x)$ è

☐ *(a)* pari

☐ *(b)* dispari

☐ *(c)* nè pari nè dispari

☐ *(d)* decrescente

(11) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos(4x)}$ è

☐ *(a)* $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(b)* $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(c)* $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

☐ *(d)* $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(12) Le soluzioni della disequazione $\sin^2 x > \tan^2 x$ sono

☐ *(a)* infinite

☐ *(b)* nessuna

☐ *(c)* 1

☐ *(d)* 2

(13) Le soluzioni della disequazione $\sin^2 x < \tan^2 x$ sono

☐ *(a)* infinite

☐ *(b)* nessuna

☐ *(c)* 1

☐ *(d)* 2

(14) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $40cm$ e un angolo acuto è di 45^o. Calcolare l'area del triangolo.

- ☐ *(a)* $40cm^2$
- ☐ *(b)* $40\sqrt{2}cm^2$
- ☐ *(c)* $400cm^2$
- ☐ *(d)* $0,4m^2$

(15) In un triangolo isoscele un angolo misura 120^o e il lato opposto a tale angolo misura 30 metri. Quanto misurano i lati uguali?

- ☐ *(a)* $10\sqrt{3}$ metri
- ☐ *(b)* 15 metri
- ☐ *(c)* $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ metri
- ☐ *(d)* $15\sqrt{2}$ metri