CAPITOLO 6

ESEMPI

In questo capitolo vengono presentati alcuni esempi accademici relativi alle quattro condizioni di unicità con le relative stime di stabilità. Vengono elencati,per ogni esempio, i valori numerici delle tre grandezze. Ogni esempio richiede il calcolo di due soluzioni dello stesso problema inverso per poter applicare le stime di stabilità:

- soluzione di riferimento.
- soluzione dovuta a dati di potenziale "perturbati".

Gli esempi sono stati svolti utilizzando interamente l'applicazione.

Notazione: Verrà utilizzato il carattere normale per indicare le funzioni nel continuo (e.g. t(.)) mentre si utilizzerà il grassetto (e.g. $\mathbf{t}_{1,2}$)per le funzioni discretizzate.

ATTENZIONE: l'esempio è descritto e svolto nelle pagine di testo.
Le fotografie riguardano lo svolgimento di altri problemi ed hanno solo scopo illustrativo.

6.2 - ESEMPIO 2 (*Probl. di Cauchy regolare: conducibilità stazionaria*)

A) *Problema di riferimento*

Il dominio è **D** = (0,1).

Potenziale: $u(x) = x^2 + x$. pot 51 e 2

Sorgente: $f(x) = 6\,x^2 - 2\,x + (3/2)$. sor 51 e 2

La *conducibilità* è data dall'espressione:

$$t(x) = (\,x - (1/2)\,)^2 + 1$$

C.1 - FINESTRA PRINCIPALE (MAIN WINDOW)

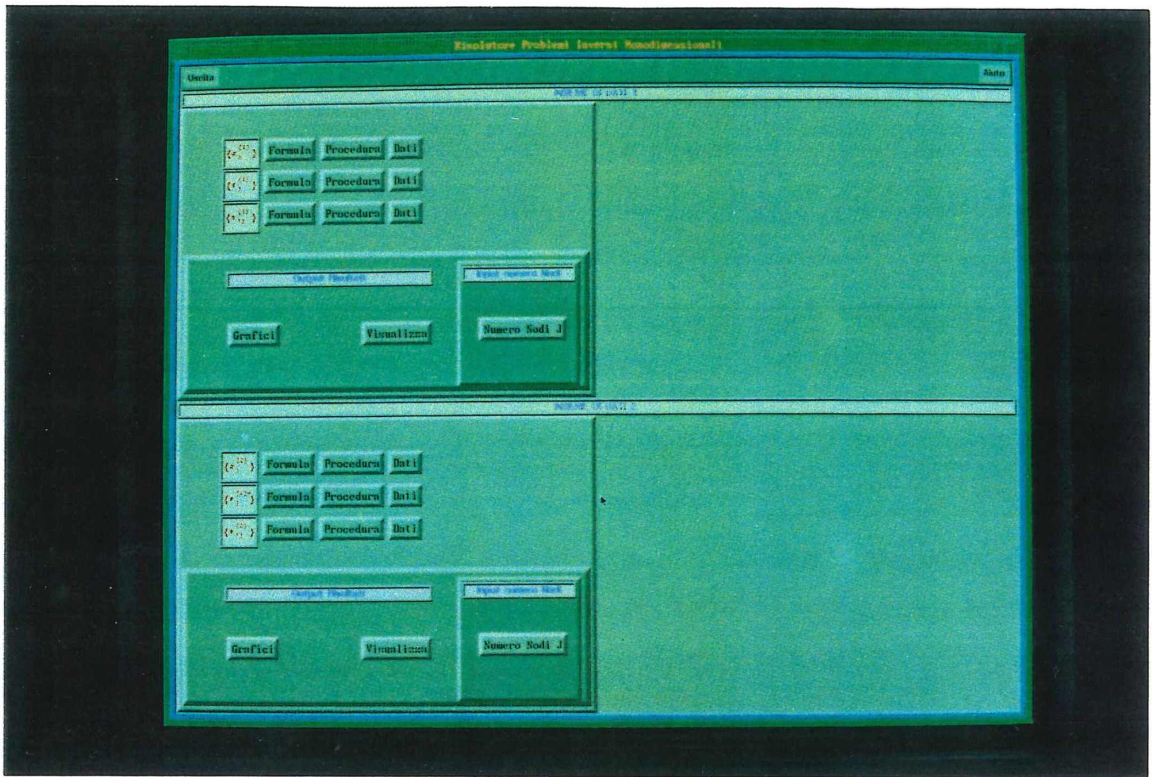

Fig. C.1 - Finestra Principale (Main Window)

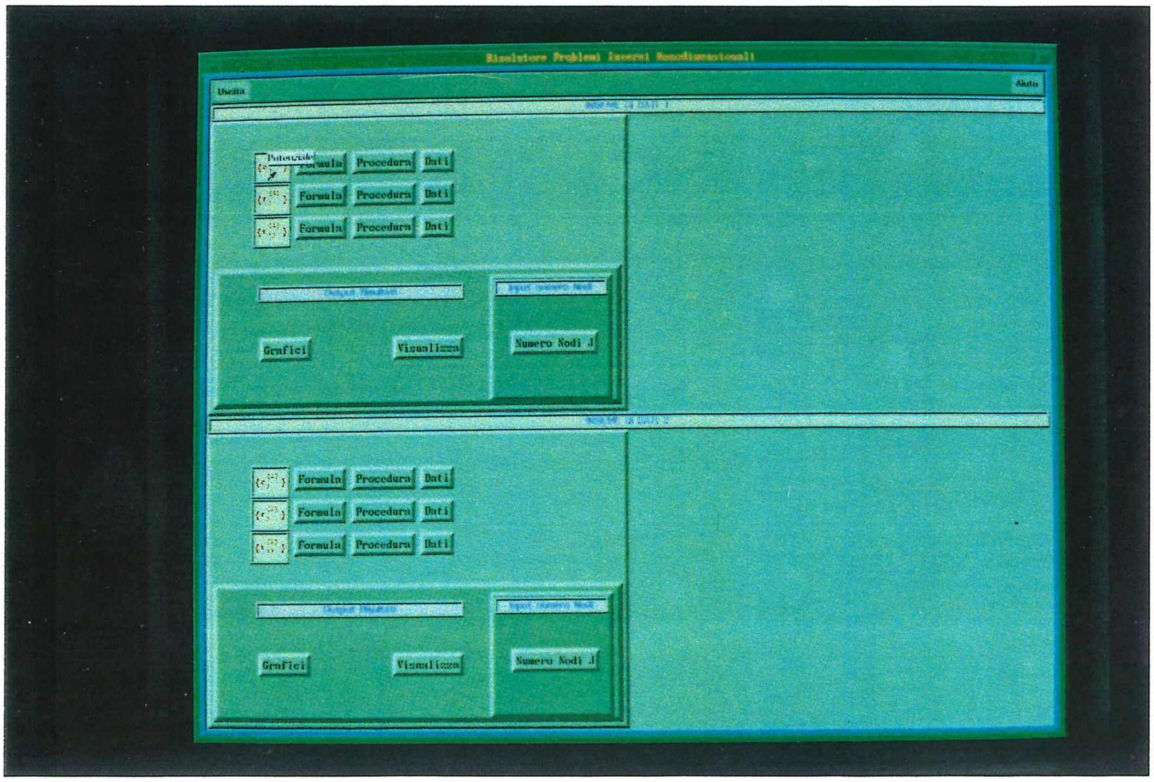

Fig. C.2 - Main Window: Etichetta descrittiva

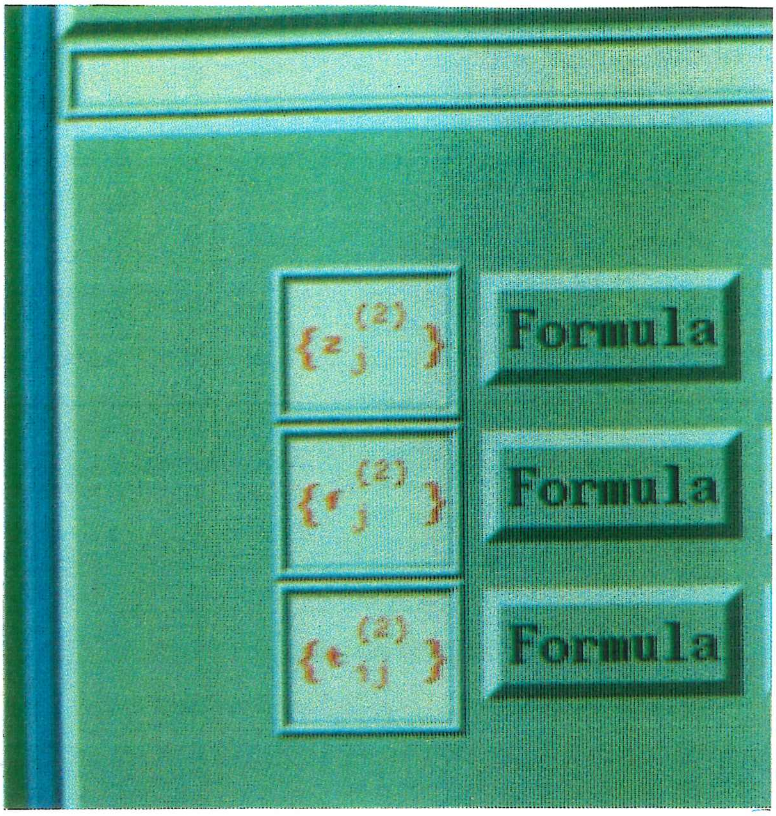

Fig. C.3 - Particolare Icone bottoniera principale

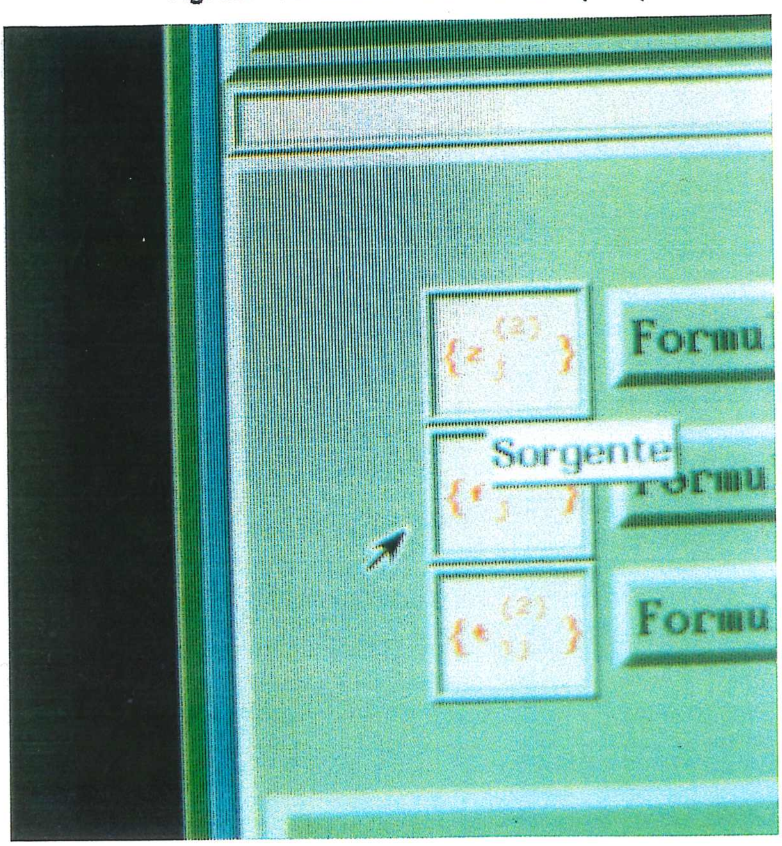

Fig. C.4 - Particolare icone: Etichetta descrittiva

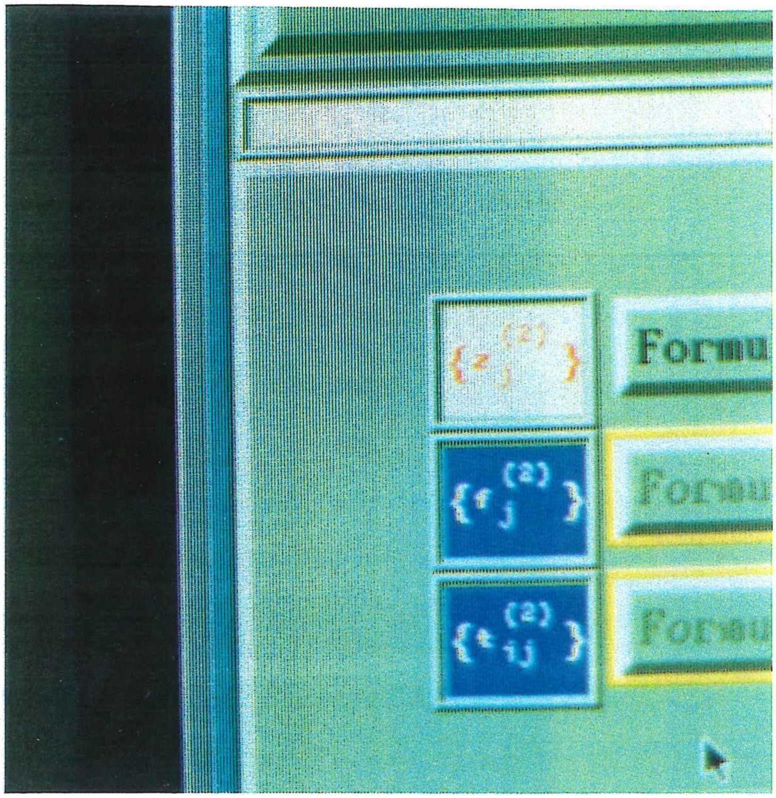

Fig. C.5 - Particolare Icone: Cambio di colore su selezione

C.2 - FINESTRA IMMISSIONE NUMERO DEI NODI

ATTENZIONE: i valori inseriti nelle finestre in fotografia riguardano altri problemi e devono perciò essere cambiati affinché corrispondano all'esempio corrente.

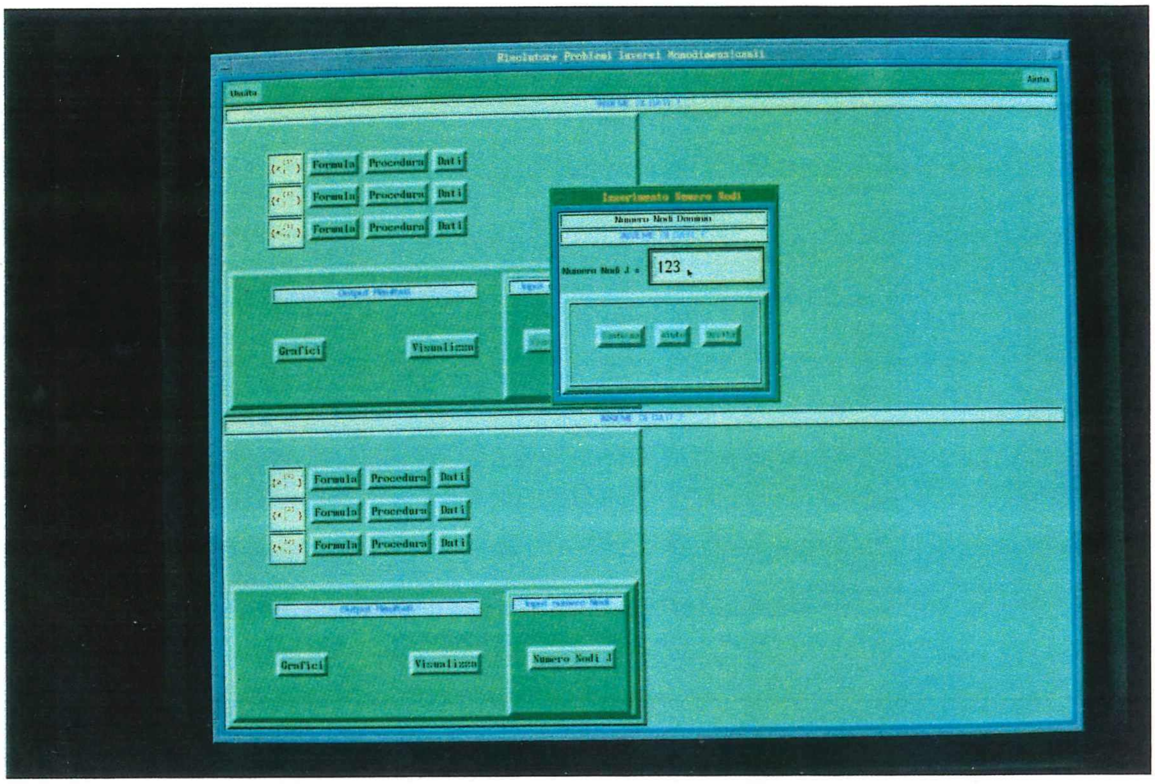

Fig. C.6 - Finestra per l'input del numero di nodi

C.3 - PROCEDURA

C.3.1 - Procedura Potenziale

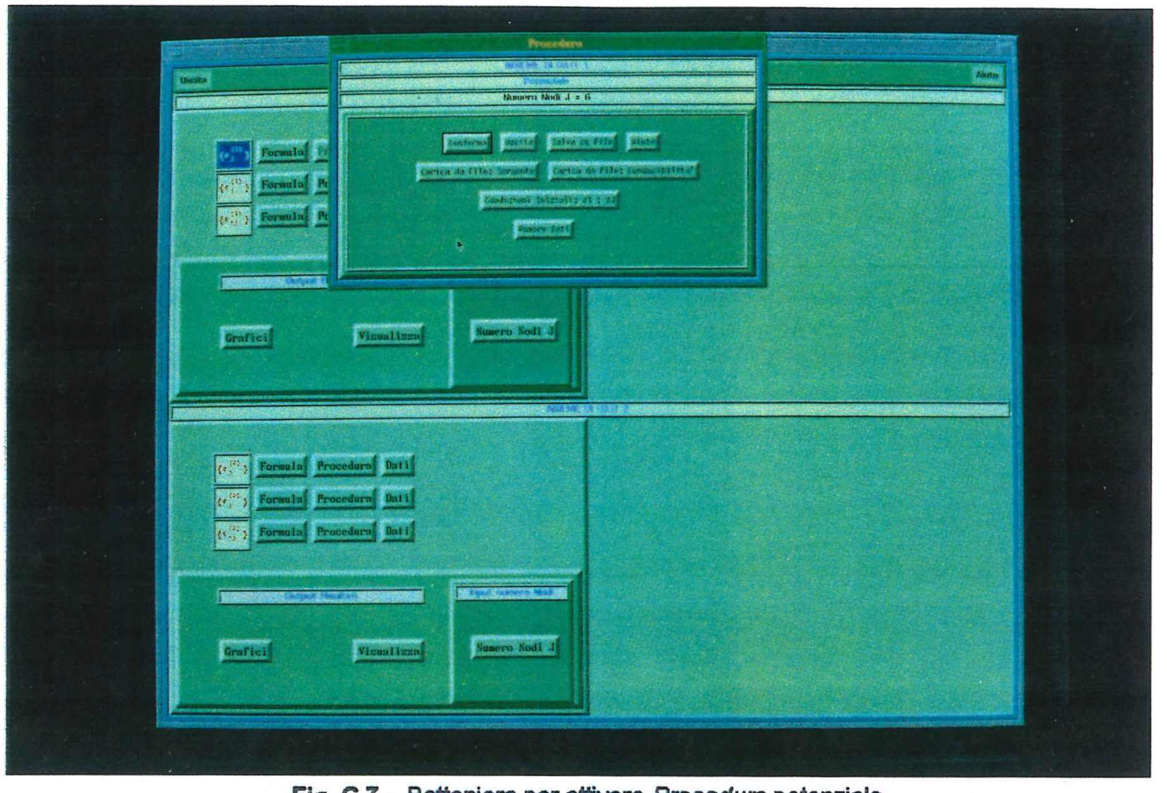

Fig. C.7 - Bottoniera per attivare *Procedura* potenziale

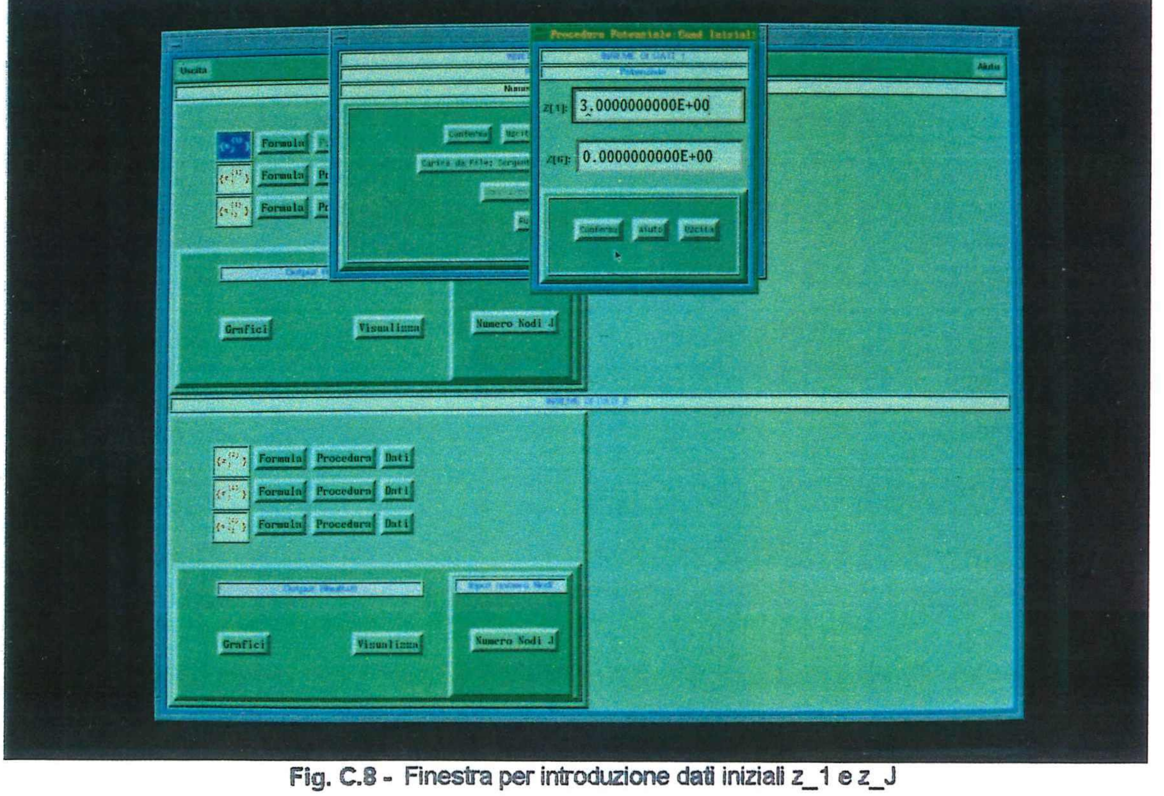

Fig. C.8 - Finestra per introduzione dati iniziali z_1 e z_J

C.3.2 - Procedura Sorgente

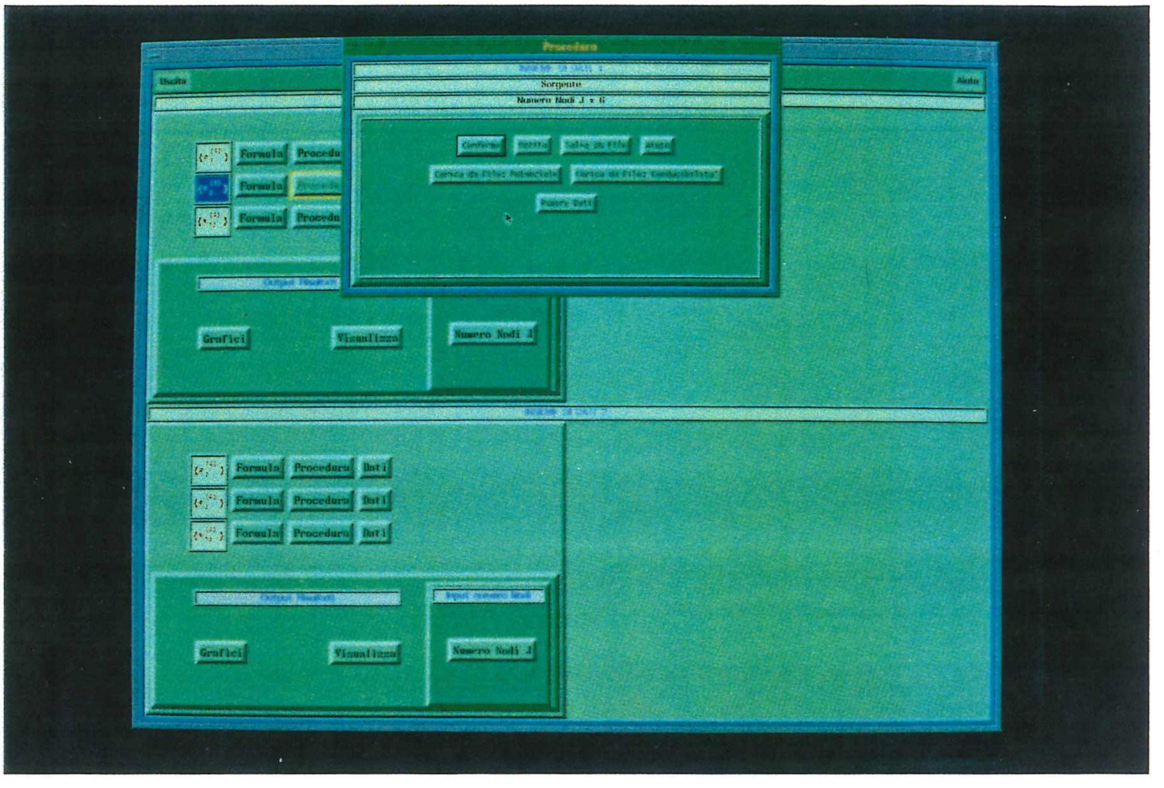

Fig. C.9 - Bottoniera per attivare *Procedura* termini di sorgente

C.4 - FORMULE

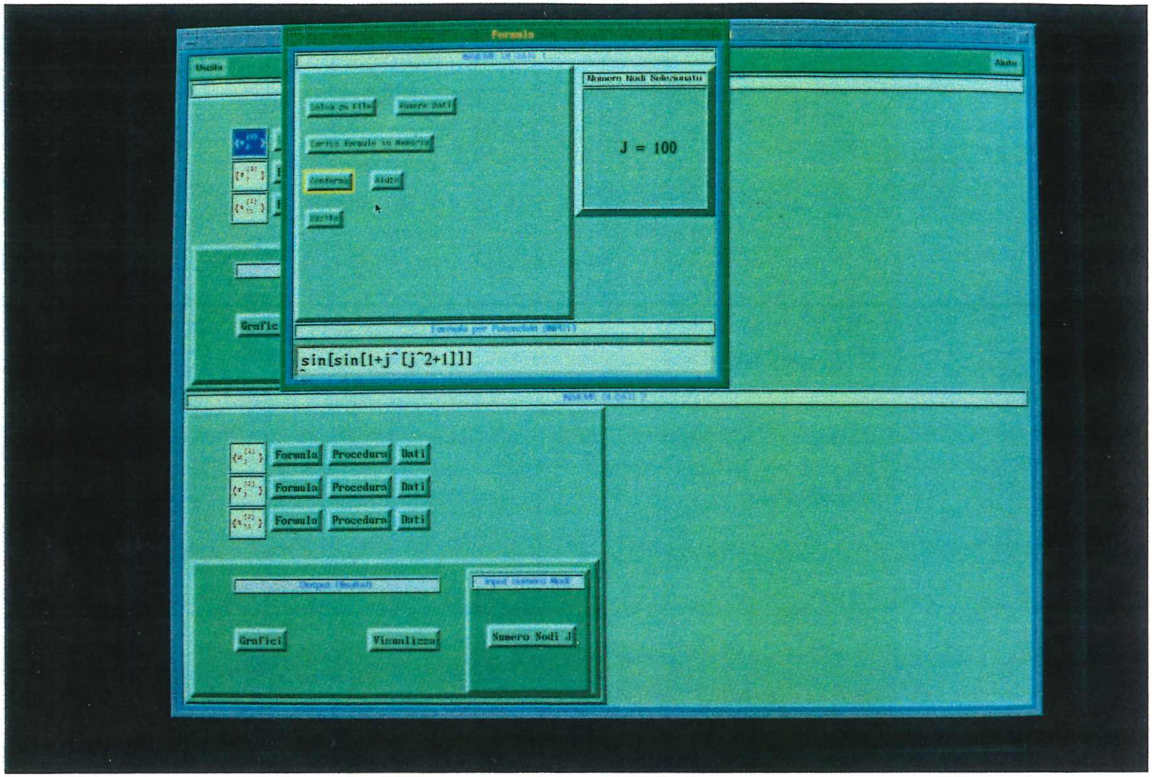

Fig. C.16 - Finestra per introduzione formule

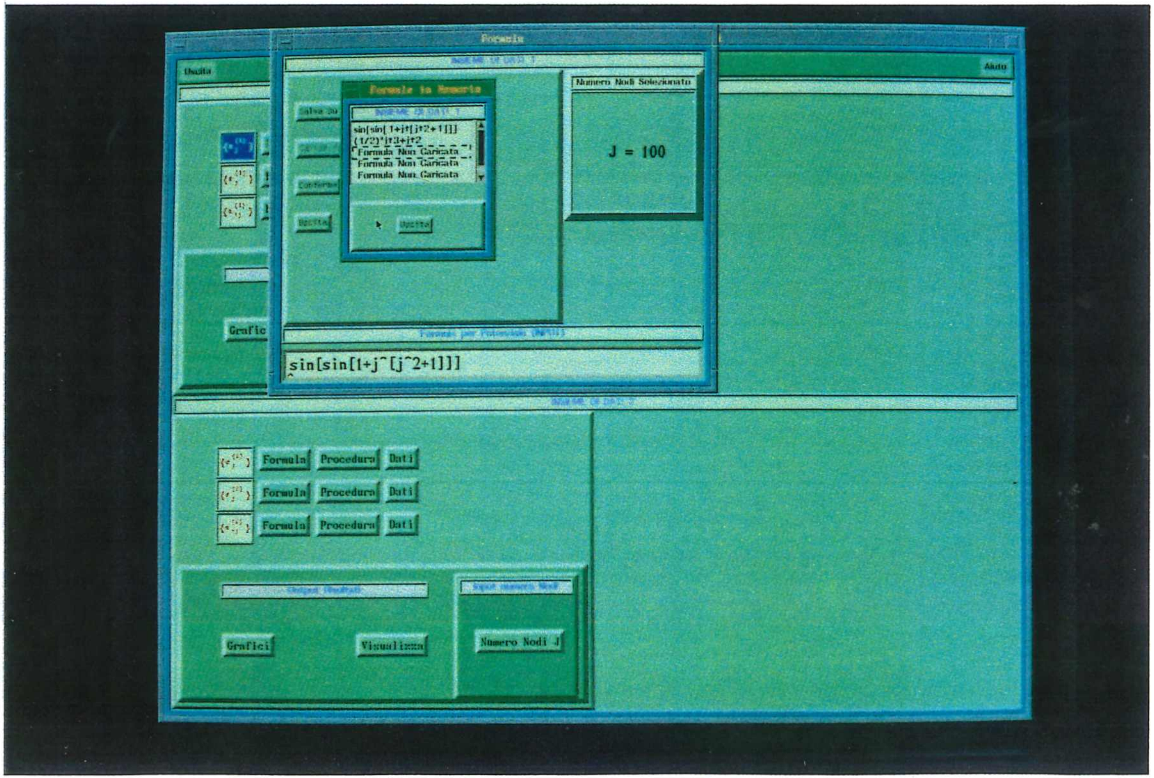

Fig. C.17 - Formula: finestra per caricamento formule da memoria

C.3.3 - Procedura Conducibilità

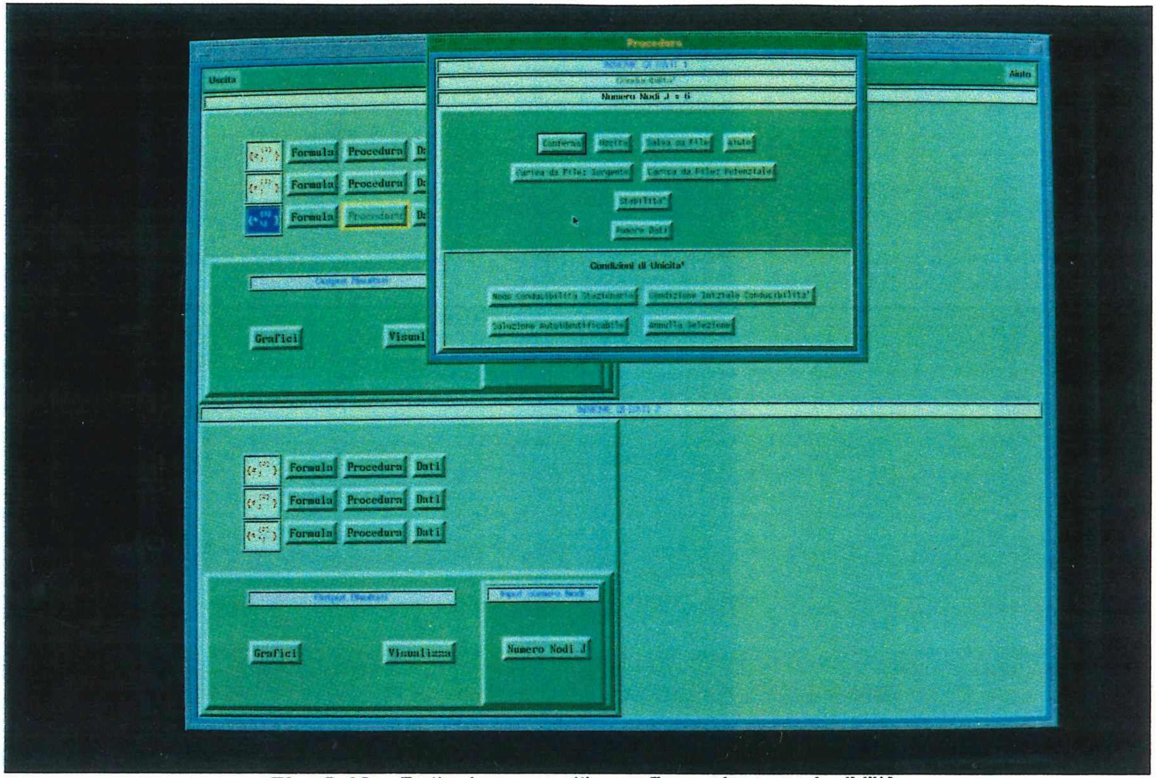

Fig. C.10 - Bottoniera per attivare *Procedura* conducibilità

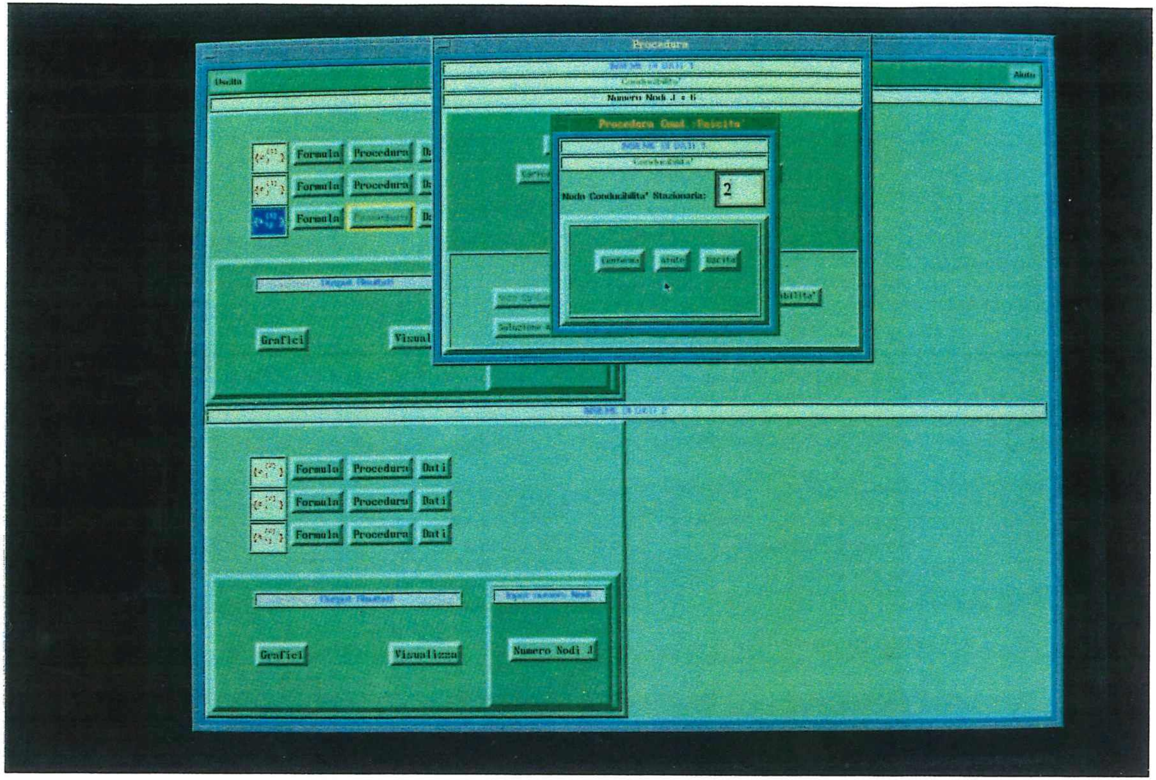

Fig. C.12 - Finestra per l'introduzione nodo conducibilità stazionaria

Esempio 2, PBM, 1

Il potenziale non presenta punti critici, mentre la conducibilità possiede un *punto stazionario* nel punto x = (1/2).

Se imposta il numero di nodi J = 51 si ottiene che il punto stazionario della conducibilità corrisponde ai due intervalli contigui (25, 26) e (26, 27).

I valori del *potenziale* sono:

z_[1]: 0.0000000000E+00	z_[2]: 2.0400000000E-02	z_[3]: 4.1600000000E-02
z_[4]: 6.3600000000E-02	z_[5]: 8.6400000000E-02	z_[6]: 1.1000000000E-01
z_[7]: 1.3440000000E-01	z_[8]: 1.5960000000E-01	z_[9]: 1.8560000000E-01
z_[10]: 2.1240000000E-01	z_[11]: 2.4000000000E-01	z_[12]: 2.6840000000E-01
z_[13]: 2.9760000000E-01	z_[14]: 3.2760000000E-01	z_[15]: 3.5840000000E-01
z_[16]: 3.9000000000E-01	z_[17]: 4.2240000000E-01	z_[18]: 4.5560000000E-01
z_[19]: 4.8960000000E-01	z_[20]: 5.2440000000E-01	z_[21]: 5.6000000000E-01
z_[22]: 5.9640000000E-01	z_[23]: 6.3360000000E-01	z_[24]: 6.7160000000E-01
z_[25]: 7.1040000000E-01	z_[26]: 7.5000000000E-01	z_[27]: 7.9040000000E-01
z_[28]: 8.3160000000E-01	z_[29]: 8.7360000000E-01	z_[30]: 9.1640000000E-01
z_[31]: 9.6000000000E-01	z_[32]: 1.0044000000E+00	z_[33]: 1.0496000000E+00
z_[34]: 1.0956000000E+00	z_[35]: 1.1424000000E+00	z_[36]: 1.1900000000E+00
z_[37]: 1.2384000000E+00	z_[38]: 1.2876000000E+00	z_[39]: 1.3376000000E+00
z_[40]: 1.3884000000E+00	z_[41]: 1.4400000000E+00	z_[42]: 1.4924000000E+00
z_[43]: 1.5456000000E+00	z_[44]: 1.5996000000E+00	z_[45]: 1.6544000000E+00
z_[46]: 1.7100000000E+00	z_[47]: 1.7664000000E+00	z_[48]: 1.8236000000E+00
z_[49]: 1.8816000000E+00	z_[50]: 1.9404000000E+00	z_[51]: 2.0000000000E+00

I *termini di sorgente* sono:

f_[1]: 1.5000000000E+00	f_[2]: 1.4624000000E+00	f_[3]: 1.4296000000E+00
f_[4]: 1.4016000000E+00	f_[5]: 1.3784000000E+00	f_[6]: 1.3600000000E+00
f_[7]: 1.3464000000E+00	f_[8]: 1.3376000000E+00	f_[9]: 1.3336000000E+00
f_[10]: 1.3344000000E+00	f_[11]: 1.3400000000E+00	f_[12]: 1.3504000000E+00
f_[13]: 1.3656000000E+00	f_[14]: 1.3856000000E+00	f_[15]: 1.4104000000E+00
f_[16]: 1.4400000000E+00	f_[17]: 1.4744000000E+00	f_[18]: 1.5136000000E+00
f_[19]: 1.5576000000E+00	f_[20]: 1.6064000000E+00	f_[21]: 1.6600000000E+00
f_[22]: 1.7184000000E+00	f_[23]: 1.7816000000E+00	f_[24]: 1.8496000000E+00
f_[25]: 1.9224000000E+00	f_[26]: 2.0000000000E+00	f_[27]: 2.0824000000E+00
f_[28]: 2.1696000000E+00	f_[29]: 2.2616000000E+00	f_[30]: 2.3584000000E+00
f_[31]: 2.4600000000E+00	f_[32]: 2.5664000000E+00	f_[33]: 2.6776000000E+00
f_[34]: 2.7936000000E+00	f_[35]: 2.9144000000E+00	f_[36]: 3.0400000000E+00
f_[37]: 3.1704000000E+00	f_[38]: 3.3056000000E+00	f_[39]: 3.4456000000E+00
f_[40]: 3.5904000000E+00	f_[41]: 3.7400000000E+00	f_[42]: 3.8944000000E+00
f_[43]: 4.0536000000E+00	f_[44]: 4.2176000000E+00	f_[45]: 4.3864000000E+00
f_[46]: 4.5600000000E+00	f_[47]: 4.7384000000E+00	f_[48]: 4.9216000000E+00
f_[49]: 5.1096000000E+00	f_[50]: 5.3024000000E+00	f_[51]: 5.5000000000E+00

I valori della ***conducibilità di riferimento*** determinata indicando al programma il numero del nodo centrale (j = 26):

t_[1,2]:	1.2400000000E+00	**t_[2,3]**:	1.2208000000E+00	**t_[3,4]**:	1.2024000000E+00
t_[4,5]:	1.1848000000E+00	**t_[5,6]**:	1.1680000000E+00	**t_[6,7]**:	1.1520000000E+00
t_[7,8]:	1.1368000000E+00	**t_[8,9]**:	1.1224000000E+00	**t_[9,10]**:	1.1088000000E+00
t_[10,11]:	1.0960000000E+00	**t_[11,12]**:	1.0840000000E+00	**t_[12,13]**:	1.0728000000E+00
t_[13,14]:	1.0624000000E+00	**t_[14,15]**:	1.0528000000E+00	**t_[15,16]**:	1.0440000000E+00
t_[16,17]:	1.0360000000E+00	**t_[17,18]**:	1.0288000000E+00	**t_[18,19]**:	1.0224000000E+00
t_[19,20]:	1.0168000000E+00	**t_[20,21]**:	1.0120000000E+00	**t_[21,22]**:	1.0080000000E+00
t_[22,23]:	1.0048000000E+00	**t_[23,24]**:	1.0024000000E+00	**t_[24,25]**:	1.0008000000E+00
t_[25,26]:	1.0000000000E+00	**t_[26,27]**:	1.0000000000E+00	**t_[27,28]**:	1.0008000000E+00
t_[28,29]:	1.0024000000E+00	**t_[29,30]**:	1.0048000000E+00	**t_[30,31]**:	1.0080000000E+00
t_[31,32]:	1.0120000000E+00	**t_[32,33]**:	1.0168000000E+00	**t_[33,34]**:	1.0224000000E+00
t_[34,35]:	1.0288000000E+00	**t_[35,36]**:	1.0360000000E+00	**t_[36,37]**:	1.0440000000E+00
t_[37,38]:	1.0528000000E+00	**t_[38,39]**:	1.0624000000E+00	**t_[39,40]**:	1.0728000000E+00
t_[40,41]:	1.0840000000E+00	**t_[41,42]**:	1.0960000000E+00	**t_[42,43]**:	1.1088000000E+00
t_[43,44]:	1.1224000000E+00	**t_[44,45]**:	1.1368000000E+00	**t_[45,46]**:	1.1520000000E+00
t_[46,47]:	1.1680000000E+00	**t_[47,48]**:	1.1848000000E+00	**t_[48,49]**:	1.2024000000E+00
t_[49,50]:	1.2208000000E+00	**t_[50,51]**:	1.2400000000E+00		

Esempio 2, segue

B) <u>*Secondo problema*</u>

Il dominio è **D** = (0,1).

Potenziale: $v(x) = (1 + \varepsilon)(x^2 + x.)$ pot51e2v

Sorgente: $f(x) = 6x^2 - 2x + (3/2)$. sor51e2

Il potenziale in questo esempio viene "perturbato" con legge deterministica mediante il parametro ε. Il termine di sorgente deve essere lo stesso nei due problemi per poter applicare le formule di stabilità. Il numero di nodi è J = 51.

2023-0331

La conducibilità b, in conseguenza della variazione di potenziale da u[.] a v[.] potrebbe essere più stazionaria in $x = \frac{1}{2}$

Si noti che per applicare la stima di stabilità per maggiorazione indicata nella **(2.44)** si imposta come condizione di unicità quella relativa ad un problema di Cauchy regolare con valore noto della conducibilità. Si

Esempio2, PBM1,2

sceglie, per semplicità, come dato di Cauchy il valore nel punto j = 0 della conducibilità di riferimento. Indicata con b(.) la conducibilità risultante da questo problema si ha:

$$b(0) = t(0) = (5/4).$$ 1,25

La *conducibilità* ottenuta per questo problema è:

$$b(x) = \frac{\left(2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x\right) + \frac{5(1+\varepsilon)}{4}}{(1+\varepsilon)(2x+1)}$$

ove la costante *c* di integrazione è stata eliminata come detto sopra.

Osservazione:

Manifestamente si ha $\lim_{\varepsilon \to 0} b = t$.

I valori del *potenziale perturbato* con $\varepsilon = 0.5$ sono:

z_[1]:	0.0000000000E+00	**z_[2]**:	3.0600000000E-02	**z_[3]**:	6.2400000000E-02
z_[4]:	9.5400000000E-02	**z_[5]**:	1.2960000000E-01	**z_[6]**:	1.6500000000E-01
z_[7]:	2.0160000000E-01	**z_[8]**:	2.3940000000E-01	**z_[9]**:	2.7840000000E-01
z_[10]:	3.1860000000E-01	**z_[11]**:	3.6000000000E-01	**z_[12]**:	4.0260000000E-01
z_[13]:	4.4640000000E-01	**z_[14]**:	4.9140000000E-01	**z_[15]**:	5.3760000000E-01
z_[16]:	5.8500000000E-01	**z_[17]**:	6.3360000000E-01	**z_[18]**:	6.8340000000E-01
z_[19]:	7.3440000000E-01	**z_[20]**:	7.8660000000E-01	**z_[21]**:	8.4000000000E-01
z_[22]:	8.9460000000E-01	**z_[23]**:	9.5040000000E-01	**z_[24]**:	1.0074000000E+00
z_[25]:	1.0656000000E+00	**z_[26]**:	1.1250000000E+00	**z_[27]**:	1.1856000000E+00
z_[28]:	1.2474000000E+00	**z_[29]**:	1.3104000000E+00	**z_[30]**:	1.3746000000E+00
z_[31]:	1.4400000000E+00	**z_[32]**:	1.5066000000E+00	**z_[33]**:	1.5744000000E+00
z_[34]:	1.6434000000E+00	**z_[35]**:	1.7136000000E+00	**z_[36]**:	1.7850000000E+00
z_[37]:	1.8576000000E+00	**z_[38]**:	1.9314000000E+00	**z_[39]**:	2.0064000000E+00
z_[40]:	2.0826000000E+00	**z_[41]**:	2.1600000000E+00	**z_[42]**:	2.2386000000E+00
z_[43]:	2.3184000000E+00	**z_[44]**:	2.3994000000E+00	**z_[45]**:	2.4816000000E+00
z_[46]:	2.5650000000E+00	**z_[47]**:	2.6496000000E+00	**z_[48]**:	2.7354000000E+00
z_[49]:	2.8224000000E+00	**z_[50]**:	2.9106000000E+00	**z_[51]**:	3.0000000000E+00

C.3.4 - Stabilità

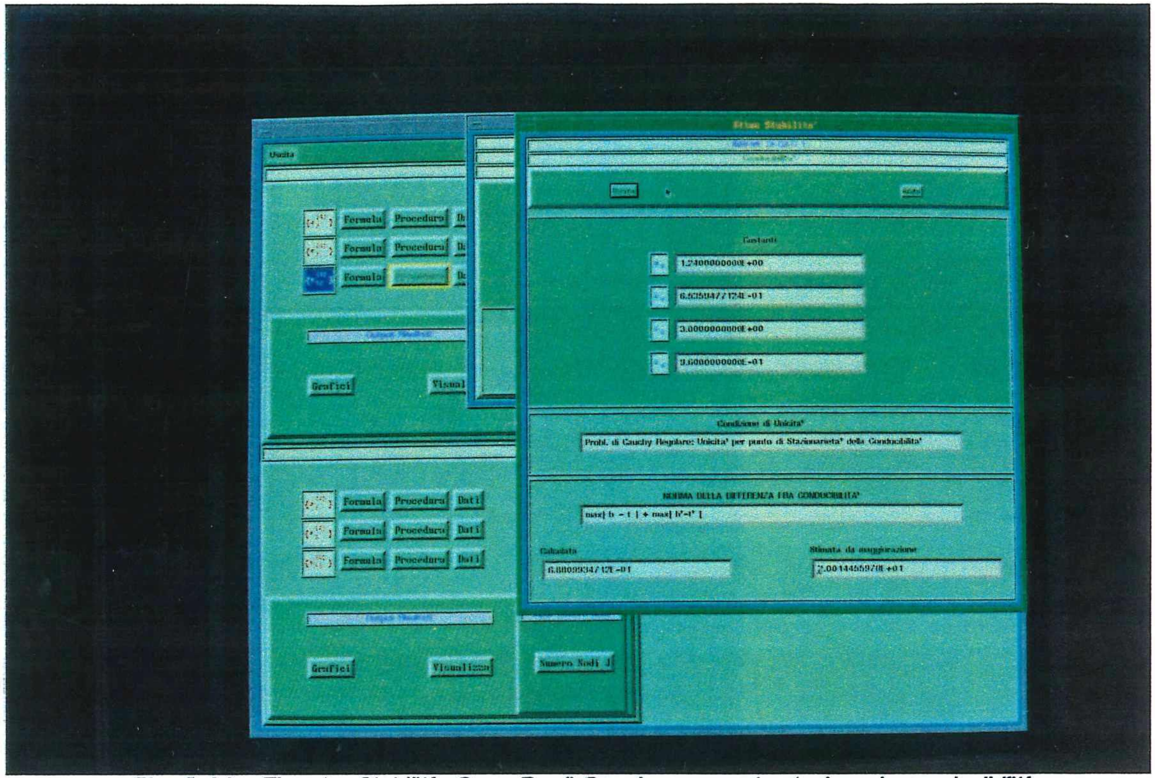

Fig. C.14 - Finestra Stabilità: Caso Pr. di Cauchy con punto stazionario conducibilità

Esempio 2, Pina

I valori della *conducibilità* ottenuta assegnando al nodo 1 il valore

t_[1,2] = 1.240000000E+00. (vedi **Notazione**)

sono i seguenti:

t_[1,2]:	1.2400000000E+00	**t_[2,3]**:	1.2116025157E+00	**t_[3,4]**:	1.1848727273E+00
t_[4,5]:	1.1596912281E+00	**t_[5,6]**:	1.1359548023E+00	**t_[6,7]**:	1.1135737705E+00
t_[7,8]:	1.0924698413E+00	**t_[8,9]**:	1.0725743590E+00	**t_[9,10]**:	1.0538268657E+00
t_[10,11]:	1.0361739130E+00	**t_[11,12]**:	1.0195680751E+00	**t_[12,13]**:	1.0039671233E+00
t_[13,14]:	9.8933333333E -01	**t_[14,15]**:	9.7563290043E -01	**t_[15,16]**:	9.6283544304E -01
t_[16,17]:	9.5091358025E -01	**t_[17,18]**:	9.3984257028E -01	**t_[18,19]**:	9.2960000000E -01
t_[19,20]:	9.2016551724E -01	**t_[20,21]**:	9.1152059925E -01	**t_[21,22]**:	9.0364835165E -01
t_[22,23]:	8.9653333333E -01	**t_[23,24]**:	8.9016140351E -01	**t_[24,25]**:	8.8451958763E -01
t_[25,26]:	8.7959595960E -01	**t_[26,27]**:	8.7537953795E -01	**t_[27,28]**:	8.7186019417E -01
t_[28,29]:	8.6902857143E -01	**t_[29,30]**:	8.6687601246E -01	**t_[30,31]**:	8.6539449541E -01
t_[31,32]:	8.6457657658E -01	**t_[32,33]**:	8.6441533923E -01	**t_[33,34]**:	8.6490434783E -01
t_[34,35]:	8.6603760684E -01	**t_[35,36]**:	8.6780952381E -01	**t_[36,37]**:	8.7021487603E -01
t_[37,38]:	8.7324878049E -01	**t_[38,39]**:	8.7690666667E -01	**t_[39,40]**:	8.8118425197E -01
t_[40,41]:	8.8607751938E -01	**t_[41,42]**:	8.9158269720E -01	**t_[42,43]**:	8.9769624060E -01
t_[43,44]:	9.0441481481E -01	**t_[44,45]**:	9.1173527981E -01	**t_[45,46]**:	9.1965467626E -01
t_[46,47]:	9.2817021277E -01	**t_[47,48]**:	9.3727925408E -01	**t_[48,49]**:	9.4697931034E -01
t_[49,50]:	9.5726802721E -01	**t_[50,51]**:	9.6814317673E -01		

Stima di stabilità

Per questo caso si è utilizzata la formula **(2.44)** discretizzata.

Le *costanti* utilizzate nella maggiorazione, in questo caso, sono:

- a_H = 1.9905833073E+00 (vedi eq. **(2.66)**).
- c_V = 6.2184720299E -01 (vedi eq. **(2.67.a)**).
- c_A = 9.6000000000E -01 (vedi eq. **(2.70)**).
- c_S = 3.0000000000E+00 (vedi eq. **(2.71)**).

La norma definita dall'eq. **(2.73)** ha il seguente valore calcolato:

$\| b - t \| \cong$ 6.8809934712E -01. max|b−t| + max|b'−t'|

Il valore che la maggiora secondo la **(2.44)** risulta essere:

2.0014455978E+01.

Per la grafica, omessa qui per brevità, vedere lo svolgimento dell'Esempio 3.

Il prossimo risultato si applica alla condizione di unicità espressa dalla **Prop. 2.3**.

Teorema 2.3: (stabilità di una soluzione unica mediante *stazionarietà*)

Poniamo che z , v soddisfino la **(2.25)** e **(2.26)** . Si suppone che a, B soddisfino rispettivamente la **(2.22), (2.28)**. In aggiunta alla disuguaglianza **(2.39)** poniamo che valgano i seguenti limiti superiori:

$$\max_{\bar{\mathbf{D}}} | v'' | \leq c_S \qquad \textbf{(2.42)}$$

$$\| a' \|_{0, \infty} \leq c_A \qquad \textbf{(2.43)}$$

Allora

$$\| B \|_{1, \infty} \leq c_V [1 + a_H + c_A + (c_S + 1) (2 a_H + | x_1 - x_2 |) c_V] \| V \|_Z \qquad \textbf{(2.44)}$$

dove $\| V \|_Z = \| V \|_{2, \infty}$.

<u>**2.1.2.2 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy singolari**</u>

Se z'(.), da cui v'(.), si annulla in qualche punto, le stime non possono più essere *uniformi* .

Questo è l'argomento di cui tratteranno i prossimi due Teoremi, i quali sono basati sulla condizione di unicità espressa dalla **Prop. 2.4** e richiederanno che i dati e le soluzioni siano più regolari.

L' esposizione seguirà lo stesso schema di quella del caso continuo.

Si noti che, per semplicità e con abuso di notazione, si utilizzeranno gli stessi simboli riguardo le costanti e le norme nel discreto di quelli utilizzati nel caso continuo anche se nel caso discreto si considerano spazi finito-dimensionali mentre nel caso continuo spazi infinito-dimensionali.

2.2.2.1 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy regolari

Quando l' unicità è dovuta al dato di Cauchy fornito in un punto regolare, la stima nel caso continuo è data dal **Teorema 2.2** il corrispettivo discreto comporta di sostituire alle norme che compaiono nella **(2.40)** le loro espressioni basate sui rapporti incrementali.

Più in dettaglio,

- La costante a_H è per definizione il massimo dei valori della soluzione di riferimento:

$$a_H = \max | t_{ij} | \quad \forall\, i,j \ \text{con} \ 1 \le i,j < J, \ \text{con} \ i=j-1, \qquad \textbf{(2.66)}$$

- La costante c_V invece dipende dalla condizione di unicità alla quale ogni stima fa riferimento. Qui vale la **(2.39)** dove alla grandezza v' nel caso discreto si sostituisce il rapporto incrementale

$$(v_{i+1} - v_i)/ h_{i,i+1} \quad \forall\, i. \qquad \textbf{(2.67)}$$

ottenendo

$$\max | h_{i,i+1} / (v_{i+1} - v_i) | \quad \forall\, i \ \text{con} \ 1 \le i < J \qquad \textbf{(2.67.a)}$$

- la norma $\| V \|_{\mathcal{X}}$ nel continuo è formata da due addendi; il primo addendo (max | V |) fa sì che la $\| V \|_{\mathcal{X}}$ sia effettivamente una norma mentre il secondo addendo ($\| V \|_{L^\infty} = \| V' \|_{0,\infty}$) è una *seminorma* .

Ai fini di stimare la stabilità il termine max | V | può essere eliminato.

Quindi nel discreto si sostituisce a $\| V \|_{\mathcal{X}}$ la grandezza:

$$\max | (V_{i+1} - V_i)/ h_{i,i+1} | \quad \forall \ i \ 1 \le i \le J \qquad \textbf{(2.68)}$$

- Alla norma $\| B \|_{L^\infty} = \| B \|_{0,\infty}$ nel discreto si sostituisce

$$\max | (b_i - a_i) | \qquad \textbf{(2.69)}$$

Il risultato del **Teorema 2.3** nel continuo (relativo ad unicità dovuta alla conoscenza di un punto stazionario della conducibilità) si discretizza come segue:

- le costanti a_H e c_V con quelle definite sopra.

- la costante c_A definita nel caso continuo dalla **(2.43)** è il massimo modulo della derivata prima della soluzione di riferimento, che pertanto diviene:

$$c_A = \max | (a_{i,i+1} - a_{i+1,i+2})/ h_{i,i+1} | \qquad \textbf{(2.70)}$$

- la costante c_S definita dalla **(2.42)** è il massimo modulo della derivata seconda del potenziale v , che viene ora espressa da:

$$c_S = \max | (v_{i+2} - 2v_{i+1} + v_i)/ (h_{i,i+1})^2 | \qquad \textbf{(2.71)}$$

Per approssimare la derivata seconda si ricorre all'*operatore centrale alle differenze finite* [Che '92] ,[Cug '77].

- la norma $\| V \|_Z = \| V \|_{2,\infty}$ definita da

  $\| V \|_Z = \max | V | + \max | V' | + \max | V'' |$

  Viene sostituita dalle corrispondenti approssimazioni cioé da:

  $$\| V \|_Z = \max | V | + \max | (V_{i+1} - V_i)/ h_{i,i+1} | + \quad \forall \ i \ 1 \le i \le J$$

  $$+ \max | (V_{i+2} - 2V_{i+1} + V_i)/ (h_{i,i+1})^2 | \qquad \textbf{(2.72)}$$

- Alla norma $\| B \|_{1,\infty}$ definita da

  $\| B \|_{1,\infty} = \max | B | + \max | B' |$

  si sostituisce l'espressione:

  $$\| B \|_{1,\infty} = \max | B | + \max | (B_{i+1} - B_i)/ h_{i,i+1} | \quad \forall \ i \ 1 \le i \le J \qquad \textbf{(2.73)}$$

2.2.2.2 Stime per soluzioni di problemi di Cauchy singolari

Come si è visto nel caso di unicità dovute ad un problema di Cauchy singolare non è possibile una maggiorazione uniforme, cioé valida in ogni punto: la maggiorazione diviene di tipo *integrale* e la stima di stabilità vale in $\mathbf{L}^1$ o al più in $\mathbf{L}^p(\mathbf{D})$ con $1 \le p < \infty$.

Per esprimere il corrispettivo discreto del **Teorema 2.4** si ha