

## CAPITOLO 6

### ESEMPI

In questo capitolo vengono presentati alcuni esempi accademici relativi alle quattro condizioni di unicità con le relative stime di stabilità. Vengono elencati, per ogni esempio, i valori numerici delle tre grandezze. Ogni esempio richiede il calcolo di due soluzioni dello stesso problema inverso per poter applicare le stime di stabilità:

- soluzione di riferimento.
- soluzione dovuta a dati di potenziale "perturbati".

Gli esempi sono stati svolti utilizzando interamente l'applicazione.

**Notazione:** Verrà utilizzato il carattere normale per indicare le funzioni nel continuo ( e.g.  $t(\cdot)$  ) mentre si utilizzerà il grassetto ( e.g.  $\mathbf{t}_{1,2}$  ) per le funzioni discretizzate.

ATTENZIONE: l'esempio è descritto e svolto nelle pagine di testo.

Le fotografie riguardano lo svolgimento di altri problemi ed hanno solo scopo illustrativo.

#### 6.4 - ESEMPIO 4 ( *Probl. di Cauchy regolare: soluzione autoidentificabile* )

##### A) Problema di riferimento

Il dominio è  $D = ( 0, 1 )$ .

*Potenziale:*  $u(x) = x^2 + x$ .

*Sorgente:*  $f(x) = 6x^2 - 2x + (3/2)$ .

La formula della *conducibilità* :

$$t(x) = (x - (1/2))^2 + 1$$

Il potenziale non presenta punti critici.

Si imposta un numero di nodi pari a  $J = 51$  e si impone il valore  $k$  del flusso medio sul dominio pari a 2.166666667. Tale valore è stato calcolato a parte tramite l'espressione:

$$k = \int_D t(\cdot) u_x(\cdot) dx \quad D = (0,1).$$

I valori del *potenziale* sono:

z_[1]: 0.000000000E+00	z_[2]: 2.040000000E -02	z_[3]: 4.160000000E -02
z_[4]: 6.360000000E -02	z_[5]: 8.640000000E -02	z_[6]: 1.100000000E -01
z_[7]: 1.344000000E -01	z_[8]: 1.596000000E -01	z_[9]: 1.856000000E -01
z_[10]: 2.124000000E -01	z_[11]: 2.400000000E -01	z_[12]: 2.684000000E -01
z_[13]: 2.976000000E -01	z_[14]: 3.276000000E -01	z_[15]: 3.584000000E -01
z_[16]: 3.900000000E -01	z_[17]: 4.224000000E -01	z_[18]: 4.556000000E -01
z_[19]: 4.896000000E -01	z_[20]: 5.244000000E -01	z_[21]: 5.600000000E -01
z_[22]: 5.964000000E -01	z_[23]: 6.336000000E -01	z_[24]: 6.716000000E -01
z_[25]: 7.104000000E -01	z_[26]: 7.500000000E -01	z_[27]: 7.904000000E -01
z_[28]: 8.316000000E -01	z_[29]: 8.736000000E -01	z_[30]: 9.164000000E -01
z_[31]: 9.600000000E -01	z_[32]: 1.004400000E+00	z_[33]: 1.049600000E+00
z_[34]: 1.095600000E+00	z_[35]: 1.142400000E+00	z_[36]: 1.190000000E+00
z_[37]: 1.238400000E+00	z_[38]: 1.287600000E+00	z_[39]: 1.337600000E+00

**C.1 - FINESTRA PRINCIPALE ( MAIN WINDOW )**

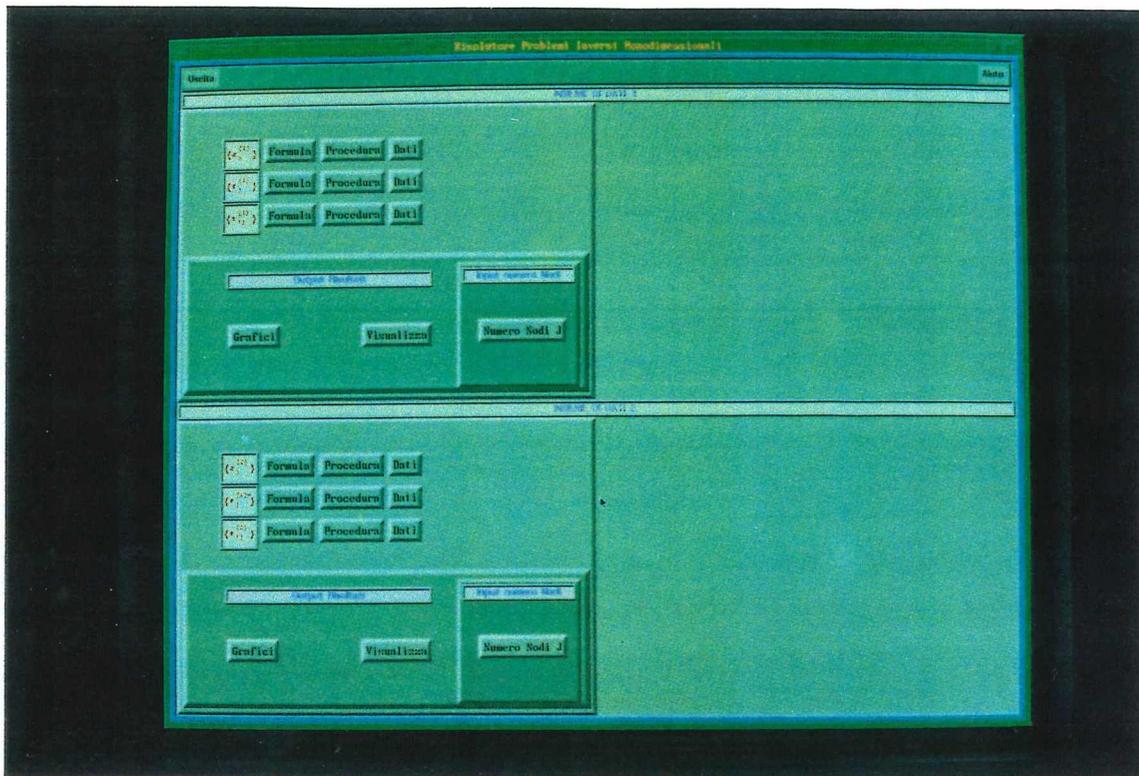


Fig. C.1 - Finestra Principale ( Main Window )

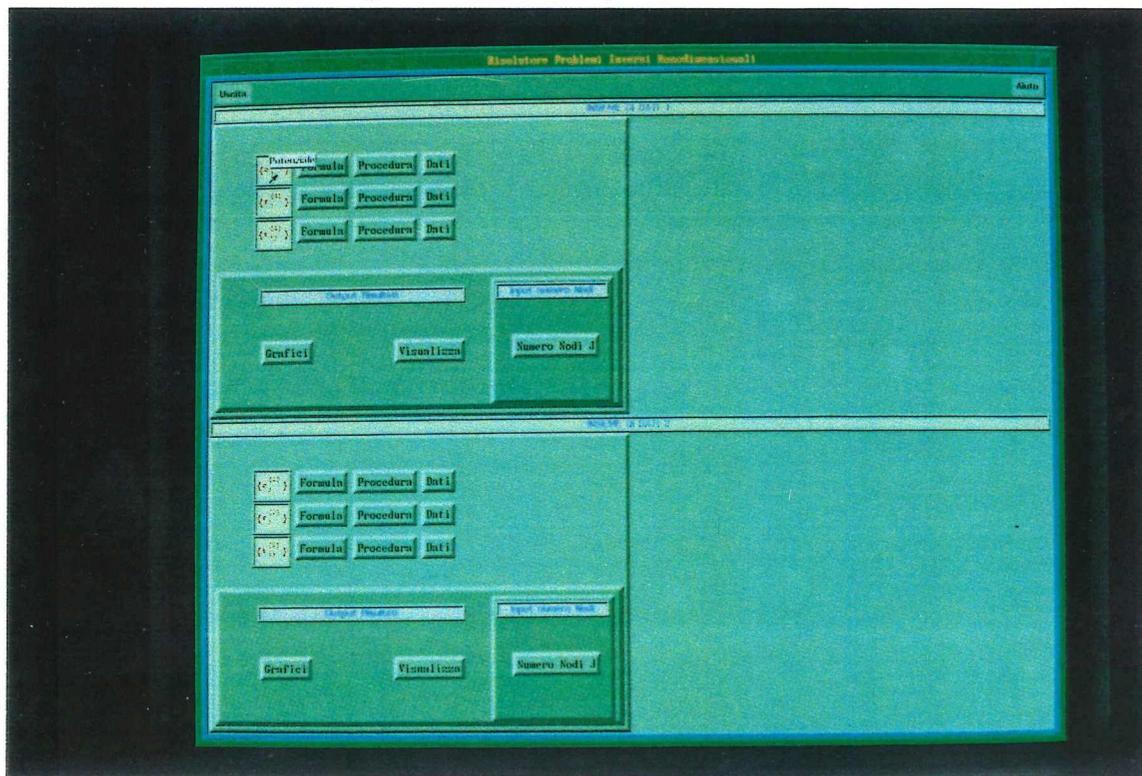


Fig. C.2 - Main Window: Etichetta descrittiva

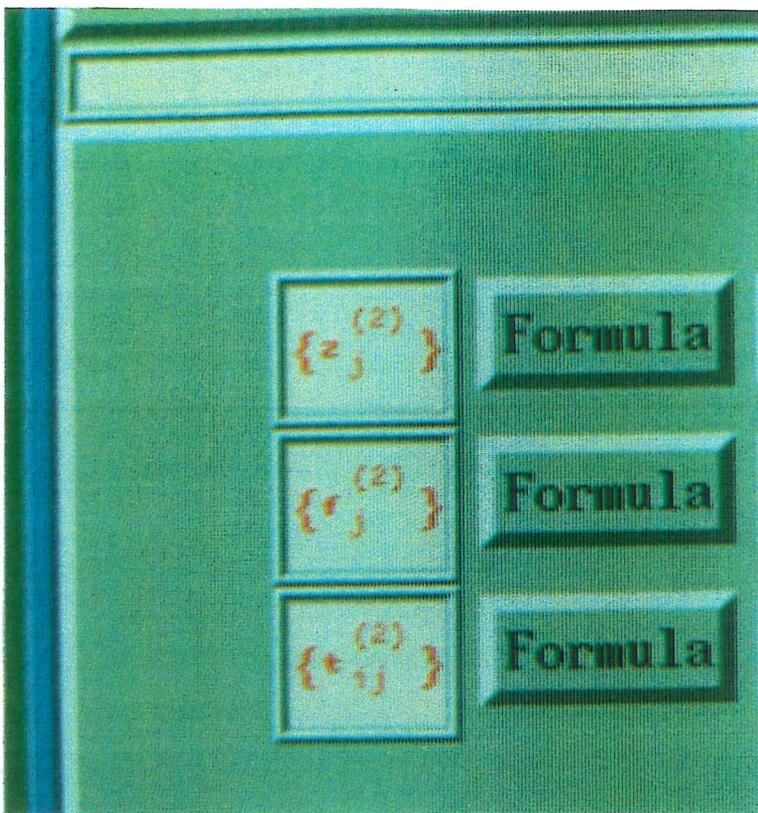


Fig. C.3 - Particolare Icone botoniera principale

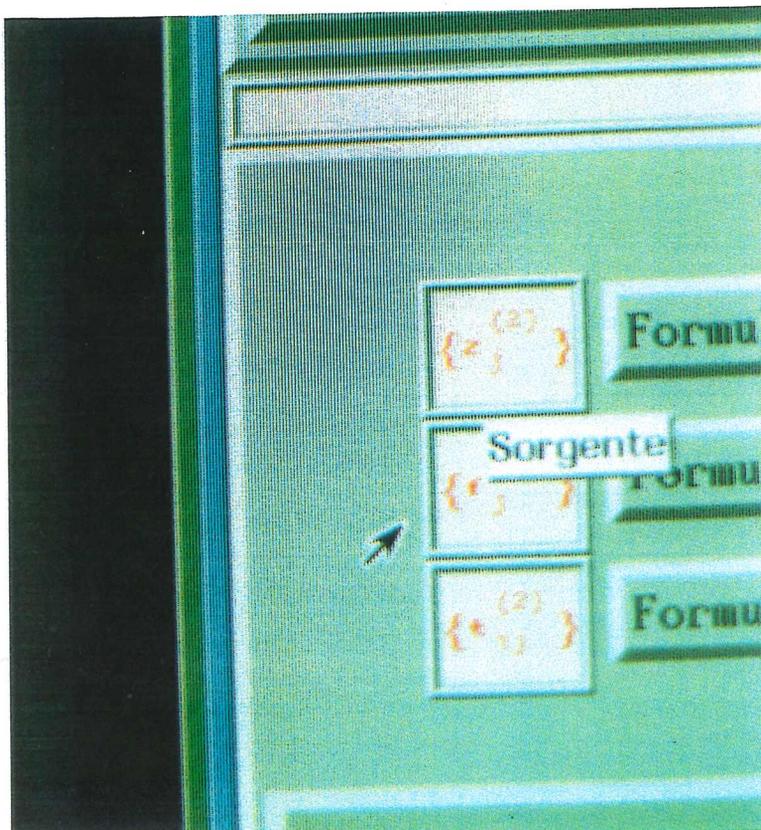


Fig. C.4 - Particolare icone: Etichetta descrittiva

## C.2 - FINESTRA IMMISSIONE NUMERO DEI NODI

ATTENZIONE: i valori inseriti nelle finestre in fotografia riguardano altri problemi e devono perciò essere cambiati affinché corrispondano all'esempio corrente.

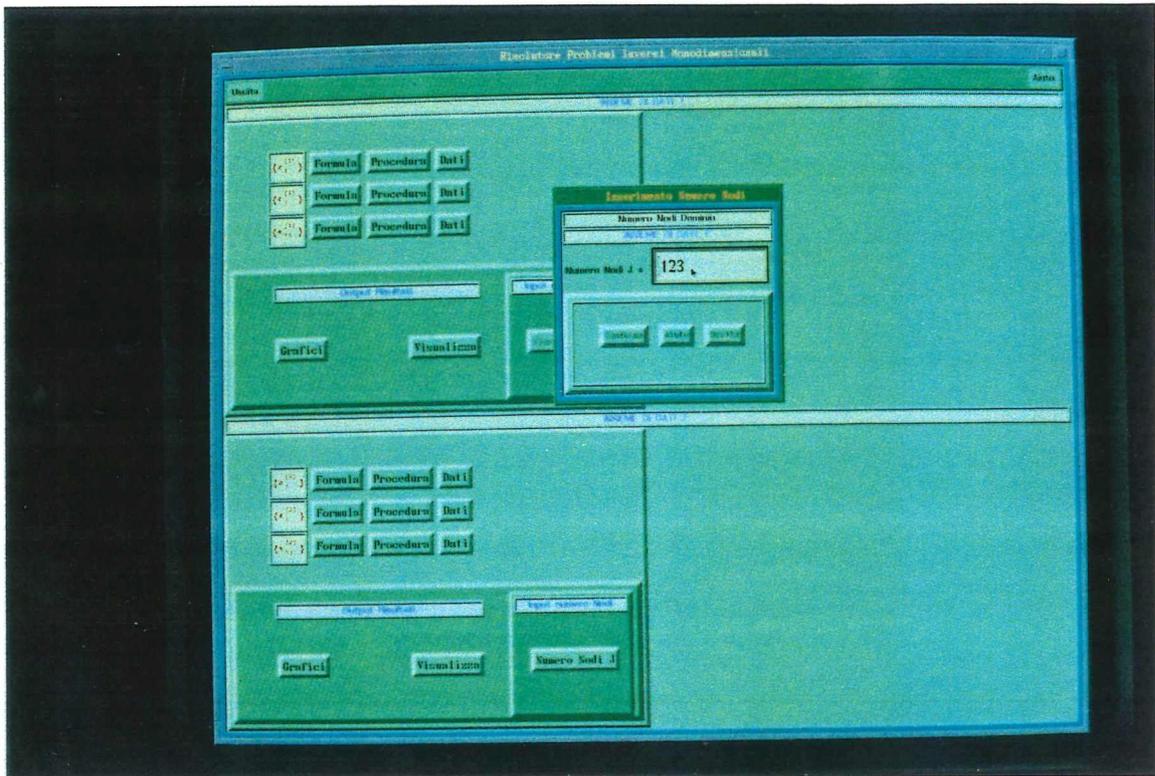


Fig. C.6 - Finestra per l'input del numero di nodi

## C.4 - FORMULE

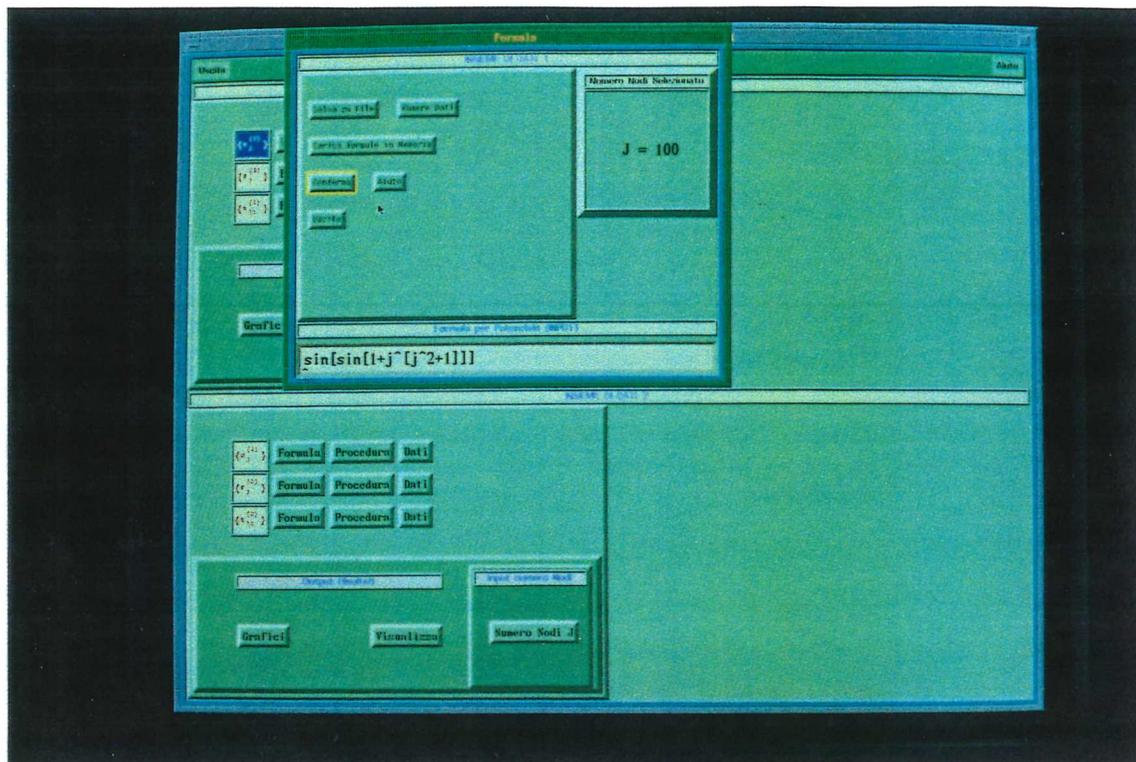


Fig. C.16 - Finestra per introduzione formule

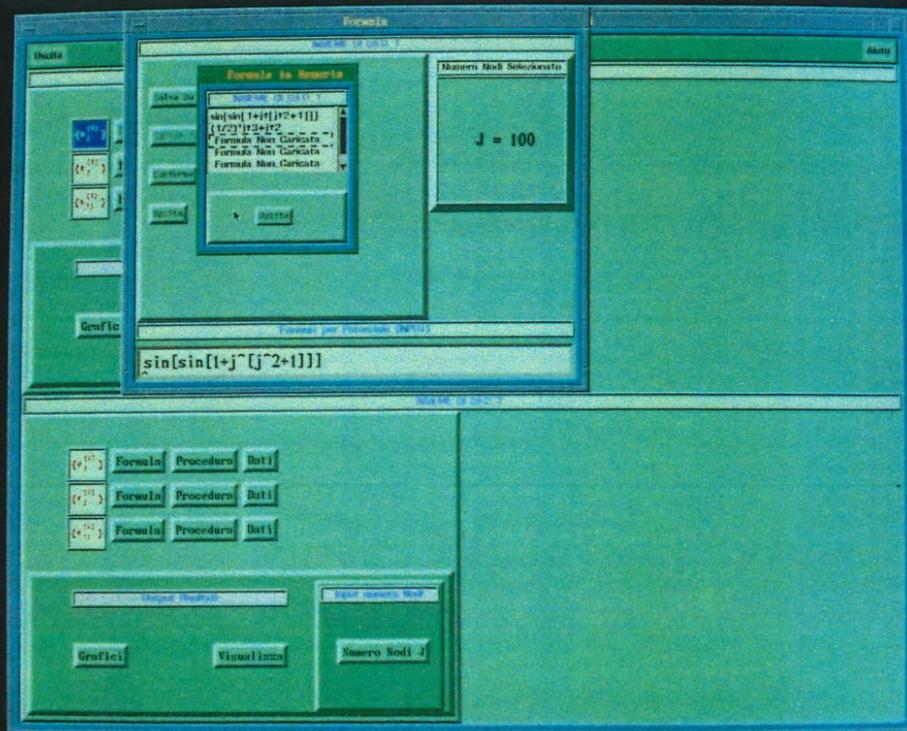


Fig. C.17 - Formula: finestra per caricamento formule da memoria

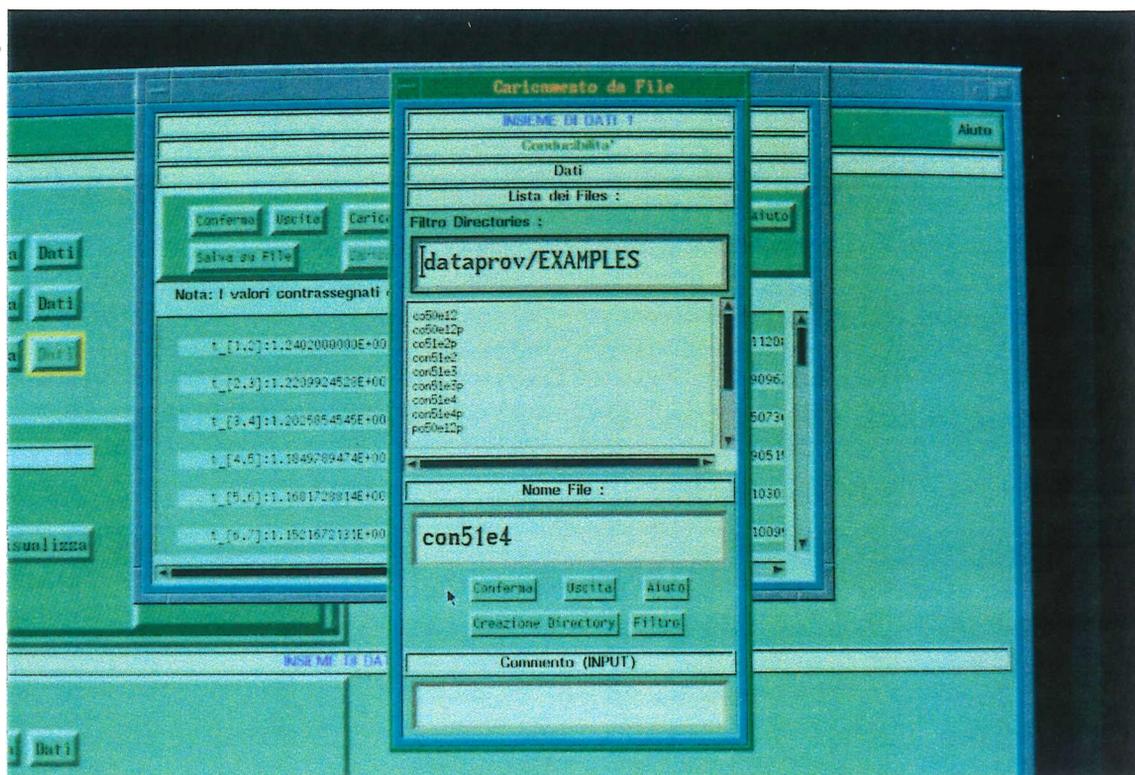


Fig. C.27 - Particolare finestra per il caricamento dati da file

### C.3.3 - Procedura Conducibilità

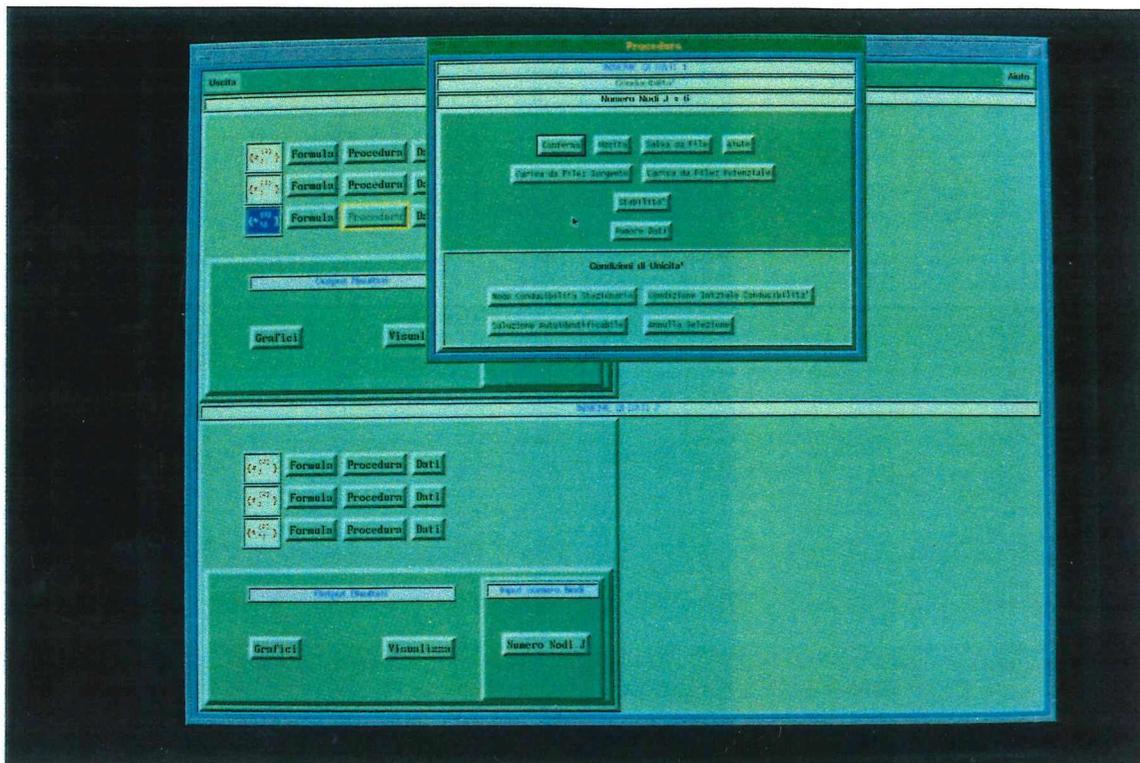


Fig. C.10 - Bottoniera per attivare *Procedura* conducibilità

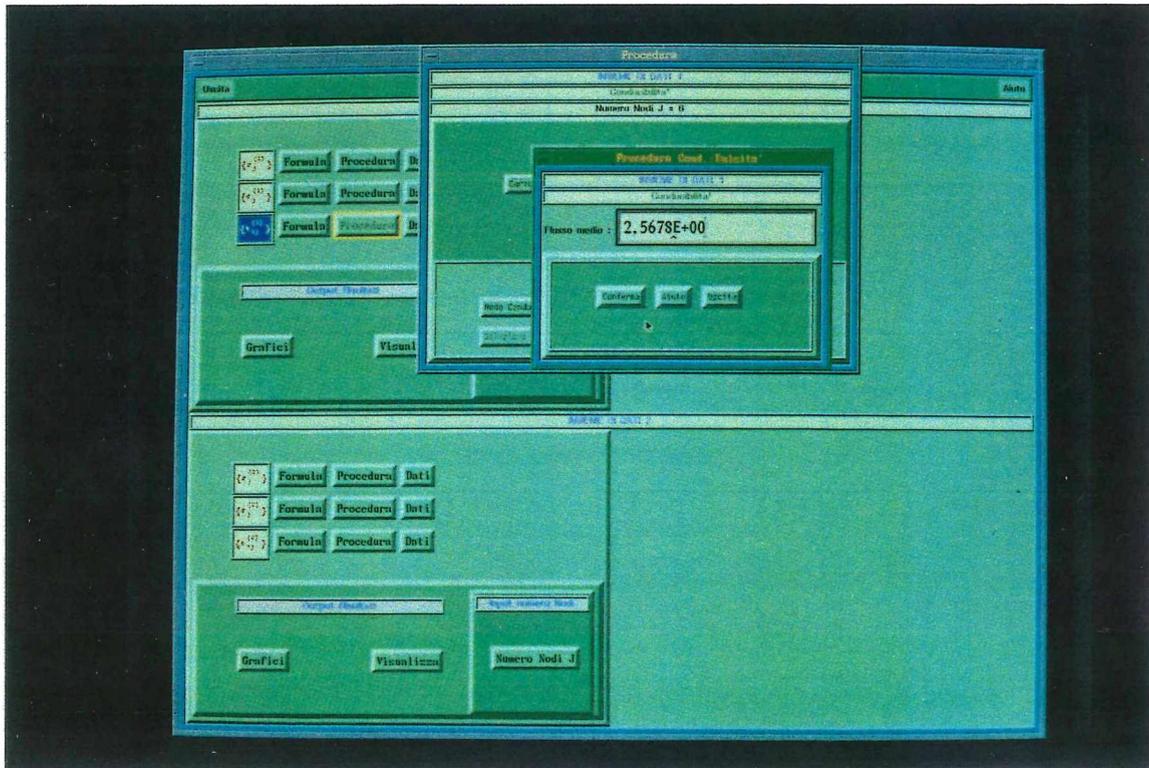


Fig. C.13 - Finestra per introduzione valore flusso medio ( Autoidentificabilità )

## Esempio 4, PGM. 1

$z_{[40]}$ : 1.3884000000E+00     $z_{[41]}$ : 1.4400000000E+00     $z_{[42]}$ : 1.4924000000E+00  
 $z_{[43]}$ : 1.5456000000E+00     $z_{[44]}$ : 1.5996000000E+00     $z_{[45]}$ : 1.6544000000E+00  
 $z_{[46]}$ : 1.7100000000E+00     $z_{[47]}$ : 1.7664000000E+00     $z_{[48]}$ : 1.8236000000E+00  
 $z_{[49]}$ : 1.8816000000E+00     $z_{[50]}$ : 1.9404000000E+00     $z_{[51]}$ : 2.0000000000E+00

I termini di sorgente valgono:

$f_{[1]}$ : 1.5000000000E+00     $f_{[2]}$ : 1.4624000000E+00     $f_{[3]}$ : 1.4296000000E+00  
 $f_{[4]}$ : 1.4016000000E+00     $f_{[5]}$ : 1.3784000000E+00     $f_{[6]}$ : 1.3600000000E+00  
 $f_{[7]}$ : 1.3464000000E+00     $f_{[8]}$ : 1.3376000000E+00     $f_{[9]}$ : 1.3336000000E+00  
 $f_{[10]}$ : 1.3344000000E+00     $f_{[11]}$ : 1.3400000000E+00     $f_{[12]}$ : 1.3504000000E+00  
 $f_{[13]}$ : 1.3656000000E+00     $f_{[14]}$ : 1.3856000000E+00     $f_{[15]}$ : 1.4104000000E+00  
 $f_{[16]}$ : 1.4400000000E+00     $f_{[17]}$ : 1.4744000000E+00     $f_{[18]}$ : 1.5136000000E+00  
 $f_{[19]}$ : 1.5576000000E+00     $f_{[20]}$ : 1.6064000000E+00     $f_{[21]}$ : 1.6600000000E+00  
 $f_{[22]}$ : 1.7184000000E+00     $f_{[23]}$ : 1.7816000000E+00     $f_{[24]}$ : 1.8496000000E+00  
 $f_{[25]}$ : 1.9224000000E+00     $f_{[26]}$ : 2.0000000000E+00     $f_{[27]}$ : 2.0824000000E+00  
 $f_{[28]}$ : 2.1696000000E+00     $f_{[29]}$ : 2.2616000000E+00     $f_{[30]}$ : 2.3584000000E+00  
 $f_{[31]}$ : 2.4600000000E+00     $f_{[32]}$ : 2.5664000000E+00     $f_{[33]}$ : 2.6776000000E+00  
 $f_{[34]}$ : 2.7936000000E+00     $f_{[35]}$ : 2.9144000000E+00     $f_{[36]}$ : 3.0400000000E+00  
 $f_{[37]}$ : 3.1704000000E+00     $f_{[38]}$ : 3.3056000000E+00     $f_{[39]}$ : 3.4456000000E+00  
 $f_{[40]}$ : 3.5904000000E+00     $f_{[41]}$ : 3.7400000000E+00     $f_{[42]}$ : 3.8944000000E+00  
 $f_{[43]}$ : 4.0536000000E+00     $f_{[44]}$ : 4.2176000000E+00     $f_{[45]}$ : 4.3864000000E+00  
 $f_{[46]}$ : 4.5600000000E+00     $f_{[47]}$ : 4.7384000000E+00     $f_{[48]}$ : 4.9216000000E+00  
 $f_{[49]}$ : 5.1096000000E+00     $f_{[50]}$ : 5.3024000000E+00     $f_{[51]}$ : 5.5000000000E+00

I valori della *conducibilità di riferimento* ( ottenuti impostando il flusso medio sul dominio ) risultano essere:

$t_{[1,2]}$ : 1.2402614382E+00     $t_{[2,3]}$ : 1.2210515726E+00     $t_{[3,4]}$ : 1.2026424245E+00  
 $t_{[4,5]}$ : 1.1850339184E+00     $t_{[5,6]}$ : 1.1682259890E+00     $t_{[6,7]}$ : 1.1522185795E+00  
 $t_{[7,8]}$ : 1.1370116405E+00     $t_{[8,9]}$ : 1.1226051285E+00     $t_{[9,10]}$ : 1.1089990052E+00  
 $t_{[10,11]}$ : 1.0961932370E+00     $t_{[11,12]}$ : 1.0841877937E+00     $t_{[12,13]}$ : 1.0729826486E+00  
 $t_{[13,14]}$ : 1.0625777780E+00     $t_{[14,15]}$ : 1.0529731604E+00     $t_{[15,16]}$ : 1.0441687766E+00  
 $t_{[16,17]}$ : 1.0361646093E+00     $t_{[17,18]}$ : 1.0289606428E+00     $t_{[18,19]}$ : 1.0225568629E+00  
 $t_{[19,20]}$ : 1.0169532569E+00     $t_{[20,21]}$ : 1.0121498129E+00     $t_{[21,22]}$ : 1.0081465203E+00  
 $t_{[22,23]}$ : 1.0049433694E+00     $t_{[23,24]}$ : 1.0025403511E+00     $t_{[24,25]}$ : 1.0009374572E+00  
 $t_{[25,26]}$ : 1.0001346803E+00     $t_{[26,27]}$ : 1.0001320134E+00     $t_{[27,28]}$ : 1.0009294500E+00  
 $t_{[28,29]}$ : 1.0025269843E+00     $t_{[29,30]}$ : 1.0049246107E+00     $t_{[30,31]}$ : 1.0081223243E+00  
 $t_{[31,32]}$ : 1.0121201203E+00     $t_{[32,33]}$ : 1.0169179942E+00     $t_{[33,34]}$ : 1.0225159422E+00  
 $t_{[34,35]}$ : 1.0289139603E+00     $t_{[35,36]}$ : 1.0361120450E+00     $t_{[36,37]}$ : 1.0441101930E+00  
 $t_{[37,38]}$ : 1.0529084012E+00     $t_{[38,39]}$ : 1.0625066668E+00     $t_{[39,40]}$ : 1.0729049870E+00  
 $t_{[40,41]}$ : 1.0841033593E+00     $t_{[41,42]}$ : 1.0961017813E+00     $t_{[42,43]}$ : 1.1089002508E+00  
 $t_{[43,44]}$ : 1.1224987656E+00     $t_{[44,45]}$ : 1.1368973237E+00     $t_{[45,46]}$ : 1.1520959234E+00  
 $t_{[46,47]}$ : 1.1680945628E+00     $t_{[47,48]}$ : 1.1848932402E+00     $t_{[48,49]}$ : 1.2024919541E+00  
 $t_{[49,50]}$ : 1.2208907031E+00     $t_{[50,51]}$ : 1.2400894856E+00

Esempio 4, segue

**B) Secondo problema**

Il dominio è  $D = (0,1)$ .

$$\text{Potenziale: } v(x) = (1 + \varepsilon) (x^2 + x).$$

$$\text{Sorgente: } f(x) = 6x^2 - 2x + (3/2).$$

Il potenziale in questo esempio viene "perturbato" mediante il parametro  $\varepsilon$ .

Il termine di sorgente deve essere lo stesso nei due problemi per poter applicare le formule di stabilità.

La *conducibilità* ottenuta per questo problema è:

$$b(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}{(1 + \varepsilon)}$$

**Osservazione:**

Manifestamente si ha  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b = t$ .

Il numero di nodi è ancora  $J = 51$ .

I valori del *potenziale perturbato* con  $\varepsilon = 0.5$  sono:

Esempio 4, Perm. 2

```

z_[1]: 0.0000000000E+00 z_[2]: 3.0600000000E-02 z_[3]: 6.2400000000E-02
z_[4]: 9.5400000000E-02 z_[5]: 1.2960000000E-01 z_[6]: 1.6500000000E-01
z_[7]: 2.0160000000E-01 z_[8]: 2.3940000000E-01 z_[9]: 2.7840000000E-01
z_[10]: 3.1860000000E-01 z_[11]: 3.6000000000E-01 z_[12]: 4.0260000000E-01
z_[13]: 4.4640000000E-01 z_[14]: 4.9140000000E-01 z_[15]: 5.3760000000E-01
z_[16]: 5.8500000000E-01 z_[17]: 6.3360000000E-01 z_[18]: 6.8340000000E-01
z_[19]: 7.3440000000E-01 z_[20]: 7.8660000000E-01 z_[21]: 8.4000000000E-01
z_[22]: 8.9460000000E-01 z_[23]: 9.5040000000E-01 z_[24]: 1.0074000000E+00
z_[25]: 1.0656000000E+00 z_[26]: 1.1250000000E+00 z_[27]: 1.1856000000E+00
z_[28]: 1.2474000000E+00 z_[29]: 1.3104000000E+00 z_[30]: 1.3746000000E+00
z_[31]: 1.4400000000E+00 z_[32]: 1.5066000000E+00 z_[33]: 1.5744000000E+00
z_[34]: 1.6434000000E+00 z_[35]: 1.7136000000E+00 z_[36]: 1.7850000000E+00
z_[37]: 1.8576000000E+00 z_[38]: 1.9314000000E+00 z_[39]: 2.0064000000E+00
z_[40]: 2.0826000000E+00 z_[41]: 2.1600000000E+00 z_[42]: 2.2386000000E+00
z_[43]: 2.3184000000E+00 z_[44]: 2.3994000000E+00 z_[45]: 2.4816000000E+00
z_[46]: 2.5650000000E+00 z_[47]: 2.6496000000E+00 z_[48]: 2.7354000000E+00
z_[49]: 2.8224000000E+00 z_[50]: 2.9106000000E+00 z_[51]: 3.0000000000E+00

```

La *conducibilità* si ottiene mediante la stessa condizione di unicità utilizzata per il problema di riferimento. I valori sono:

```

t_[1,2]: 8.2684095882E-01 t_[2,3]: 8.1403438176E-01 t_[3,4]: 8.0176161636E-01
t_[4,5]: 7.9002261228E-01 t_[5,6]: 7.7881732599E-01 t_[6,7]: 7.6814571967E-01
t_[7,8]: 7.5800776032E-01 t_[8,9]: 7.4840341897E-01 t_[9,10]: 7.3933267015E-01
t_[10,11]: 7.3079549130E-01 t_[11,12]: 7.2279186244E-01 t_[12,13]: 7.1532176575E-01
t_[13,14]: 7.0838518533E-01 t_[14,15]: 7.0198210693E-01 t_[15,16]: 6.9611251772E-01
t_[16,17]: 6.9077640617E-01 t_[17,18]: 6.8597376185E-01 t_[18,19]: 6.8170457529E-01
t_[19,20]: 6.7796883793E-01 t_[20,21]: 6.7476654195E-01 t_[21,22]: 6.7209768022E-01
t_[22,23]: 6.6996224624E-01 t_[23,24]: 6.6836023404E-01 t_[24,25]: 6.6729163814E-01
t_[25,26]: 6.6675645354E-01 t_[26,27]: 6.6675467558E-01 t_[27,28]: 6.6728630000E-01
t_[28,29]: 6.6835132286E-01 t_[29,30]: 6.6994974050E-01 t_[30,31]: 6.7208154954E-01
t_[31,32]: 6.7474674685E-01 t_[32,33]: 6.7794532950E-01 t_[33,34]: 6.8167729478E-01
t_[34,35]: 6.8594264017E-01 t_[35,36]: 6.9074136331E-01 t_[36,37]: 6.9607346198E-01
t_[37,38]: 7.0193893415E-01 t_[38,39]: 7.0833777787E-01 t_[39,40]: 7.1526999134E-01
t_[40,41]: 7.2273557287E-01 t_[41,42]: 7.3073452087E-01 t_[42,43]: 7.3926683383E-01
t_[43,44]: 7.4833251037E-01 t_[44,45]: 7.5793154915E-01 t_[45,46]: 7.6806394892E-01
t_[46,47]: 7.7872970851E-01 t_[47,48]: 7.8992882681E-01 t_[48,49]: 8.0166130276E-01
t_[49,50]: 8.1392713537E-01 t_[50,51]: 8.2672632371E-01

```

Segue la stima di stabilità.

*stima di stabilità*

Poichè entrambi i potenziali non presentano punti critici allora la stima utilizza la stessa disuguaglianza e le costanti del problema di Cauchy regolare.

Si utilizza la formula ( **2.40** ) discretizzata.

Le costanti utilizzate nella maggiorazione sono:

- $a_H = 1.2402614382E+00$  ( vedi eq. ( **2.66** ) ).
- $c_V = 6.5359477124E-01$  ( vedi eq. ( **2.67.a** ) ).

La norma definita dall'eq. ( **2.69** ) ha il seguente valore calcolato:

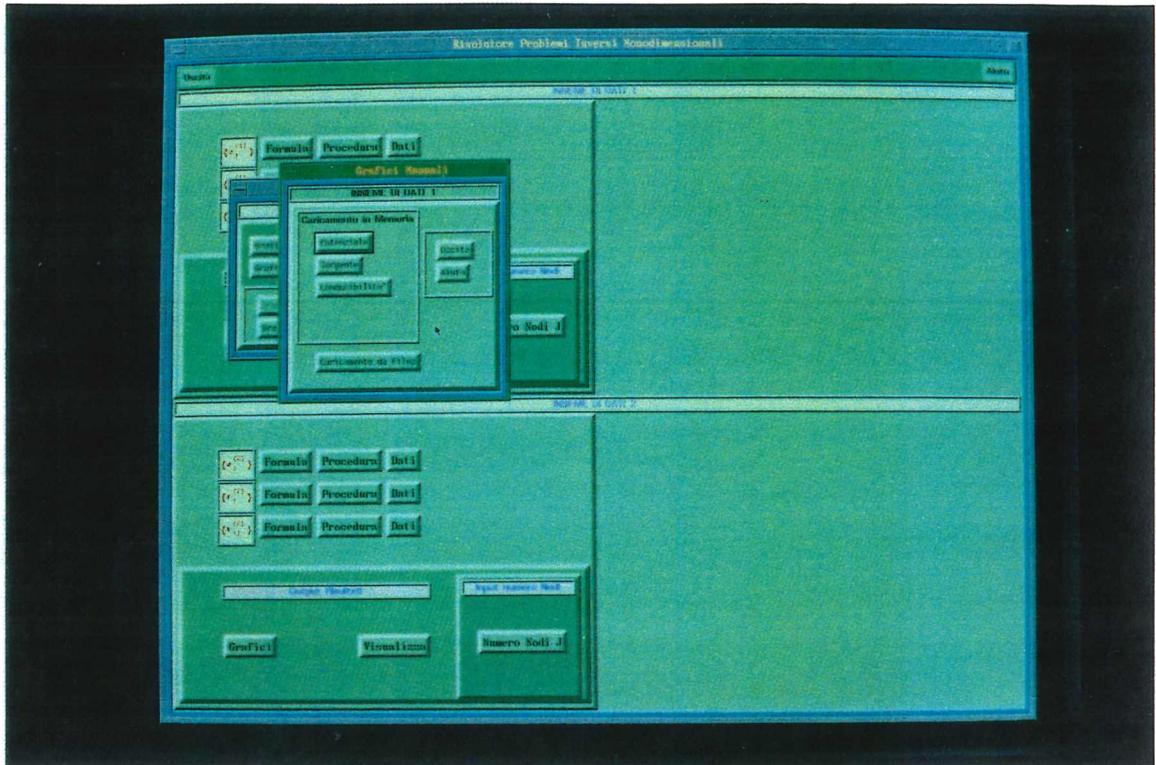
$$\| b - t \| \cong 4.13420479941E-01.$$

Il valore che la maggiora secondo la disuguaglianza ( **2.40** ) è:

$$3.1555487209E+00.$$

*Esempi con aggiunta di disturbi pseudo-casuale (da p. 51) :*

**C.8.2 - Grafici manuali**



**Fig. C.37 - menù per attivare i grafici manuali**



**Fig. C.38 - grafici manuali: caricamento da file**

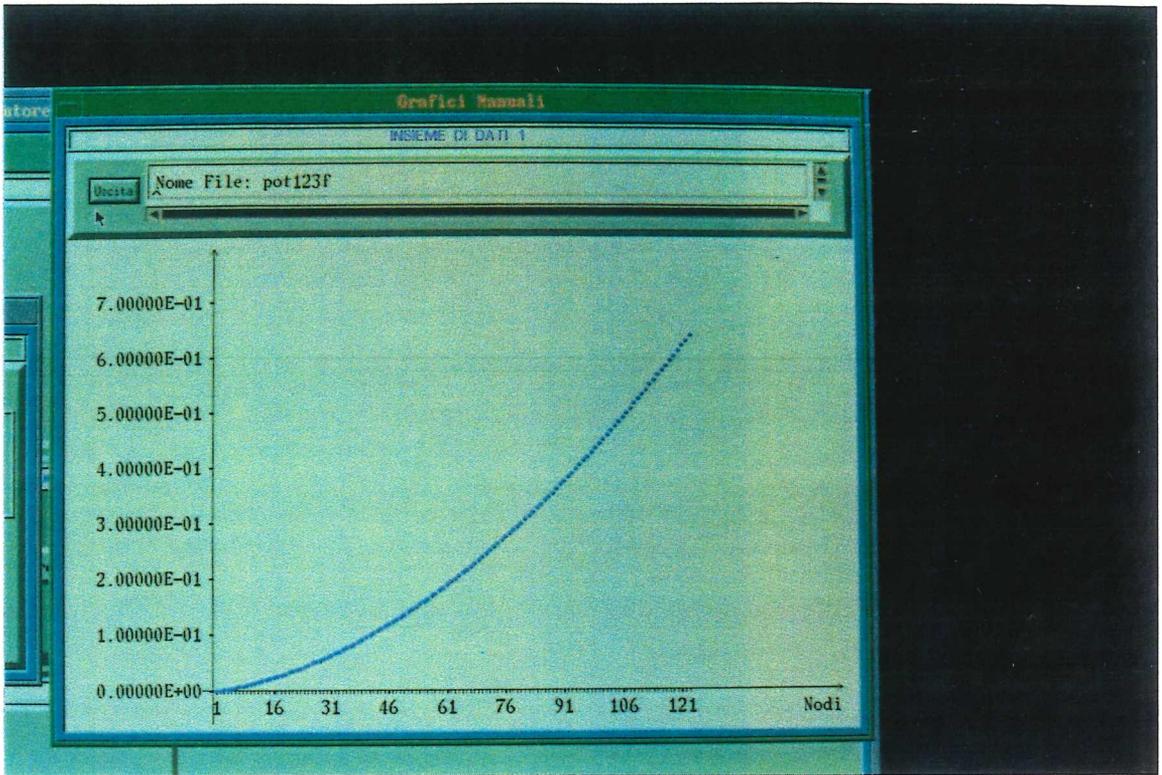


Fig. C.39 - Grafico manuale ( da file pot123f ): Formula -  $(1/2)j^2 + j \cdot \sin(3)$  (100 nodi)

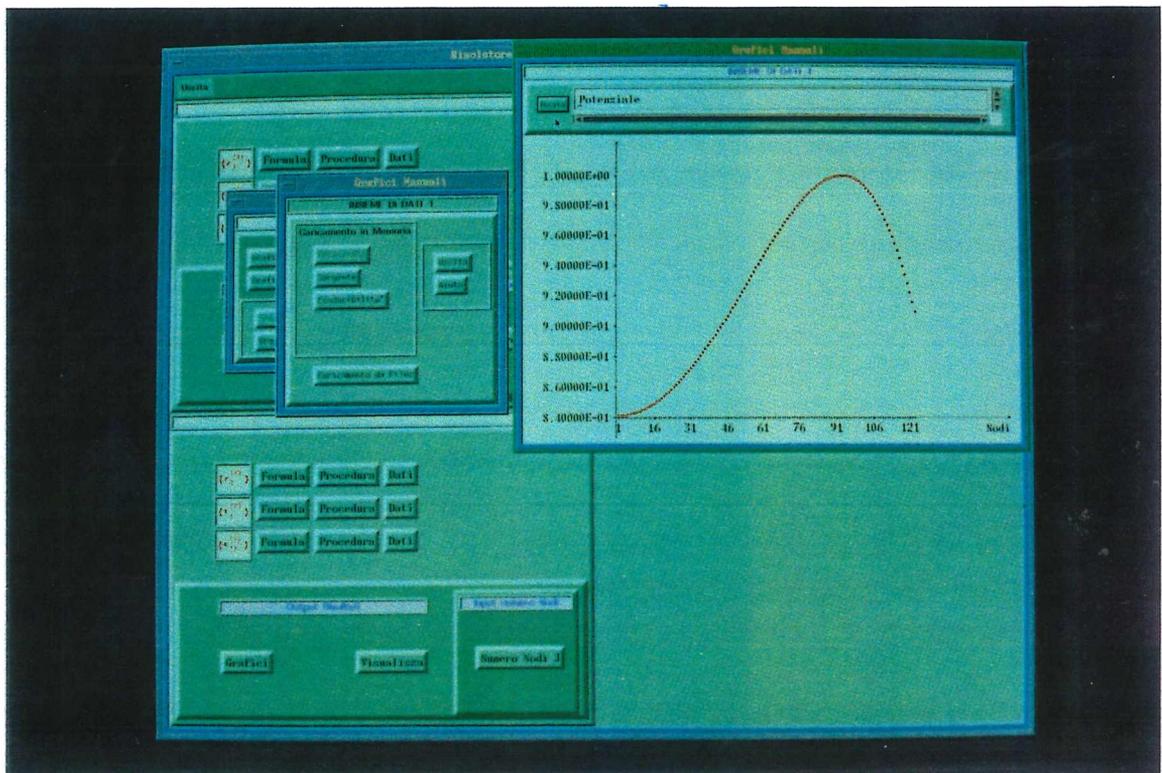


Fig. C.40 - Grafico manuale da memoria : Formula -  $\sin[1+j[ j^2+1 ]]$

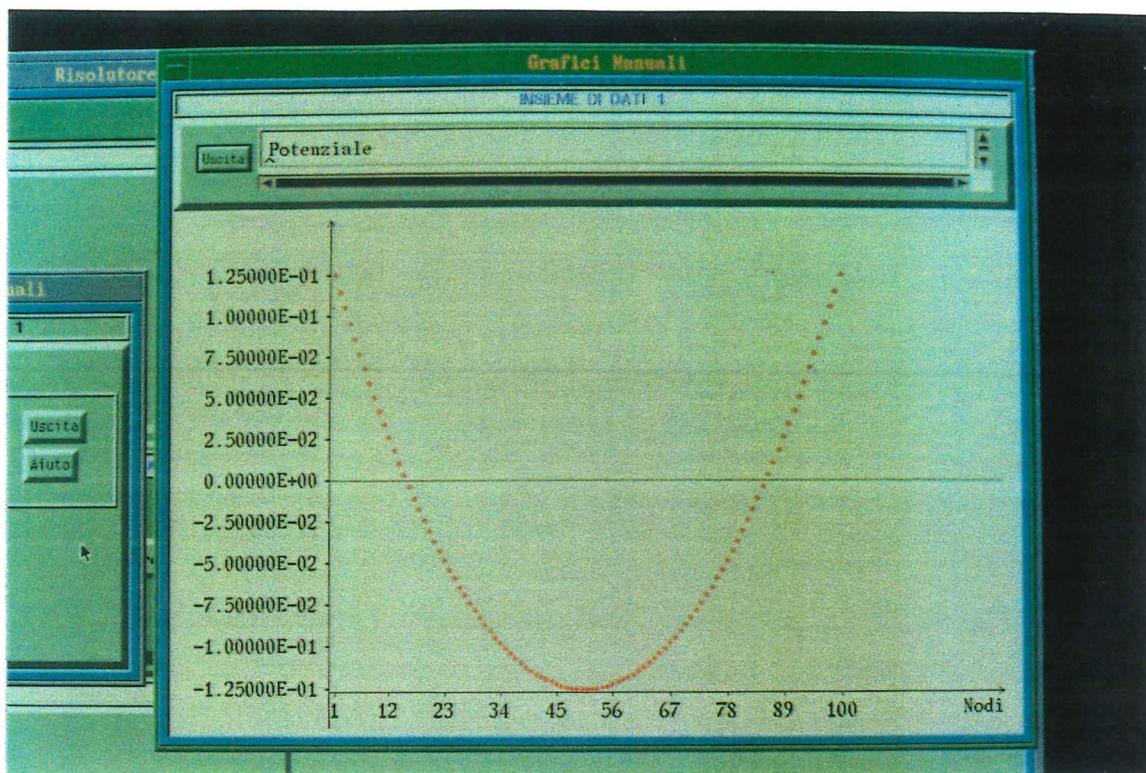


Fig. C.41 - Particolare Grafico manuale ( da memoria ): Formula  $-(j-0.5)^2 - 0.125$  (100 nodi )

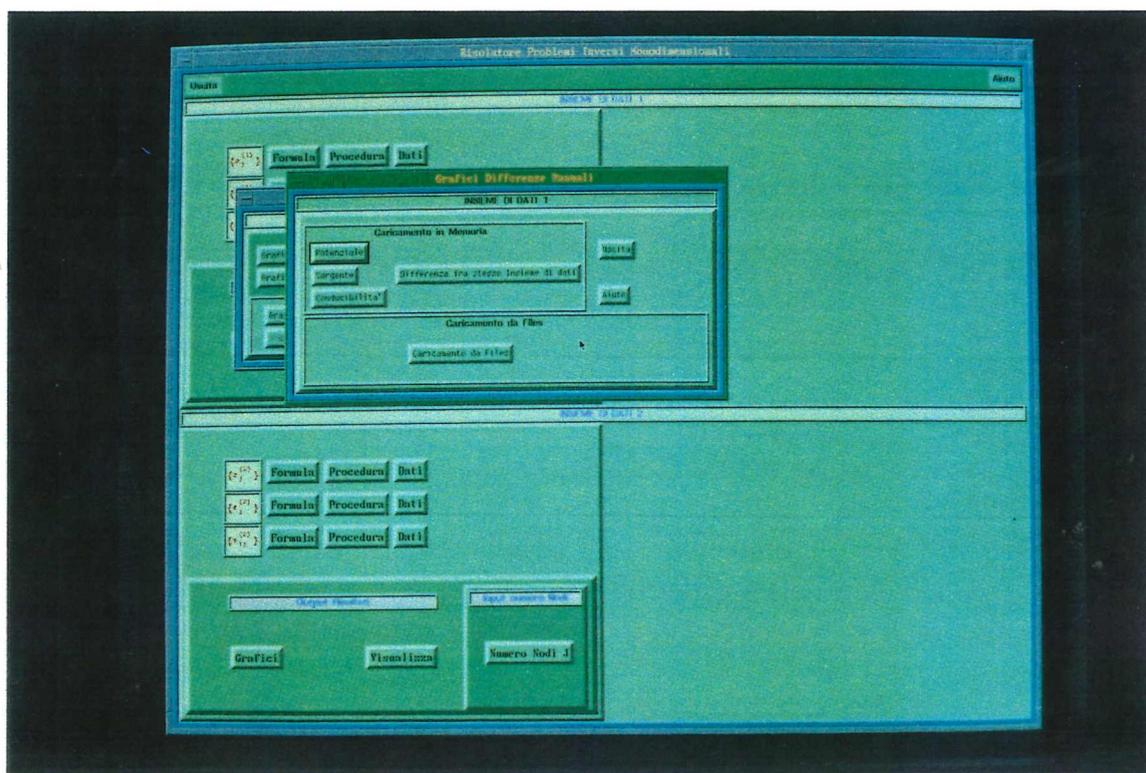


Fig. C.42 - Menù per attivare i Grafici differenze manuali

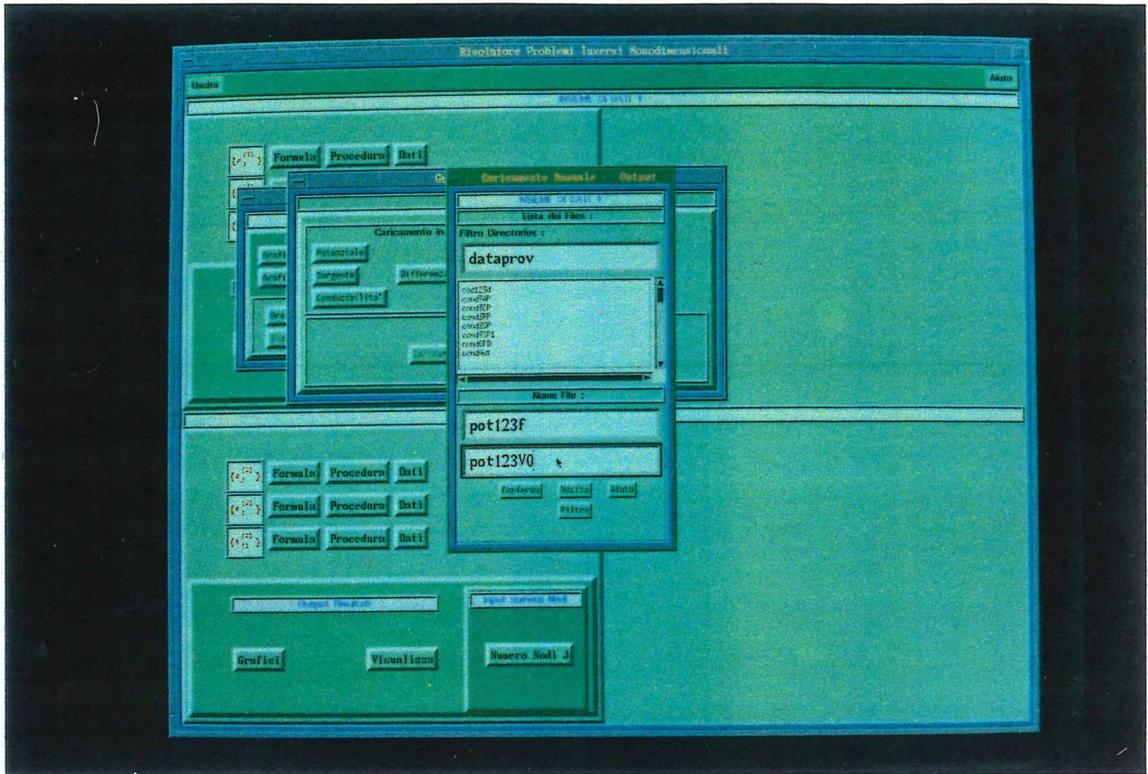


Fig. C.43 - Grafici Differenze manuali: caricamento da file

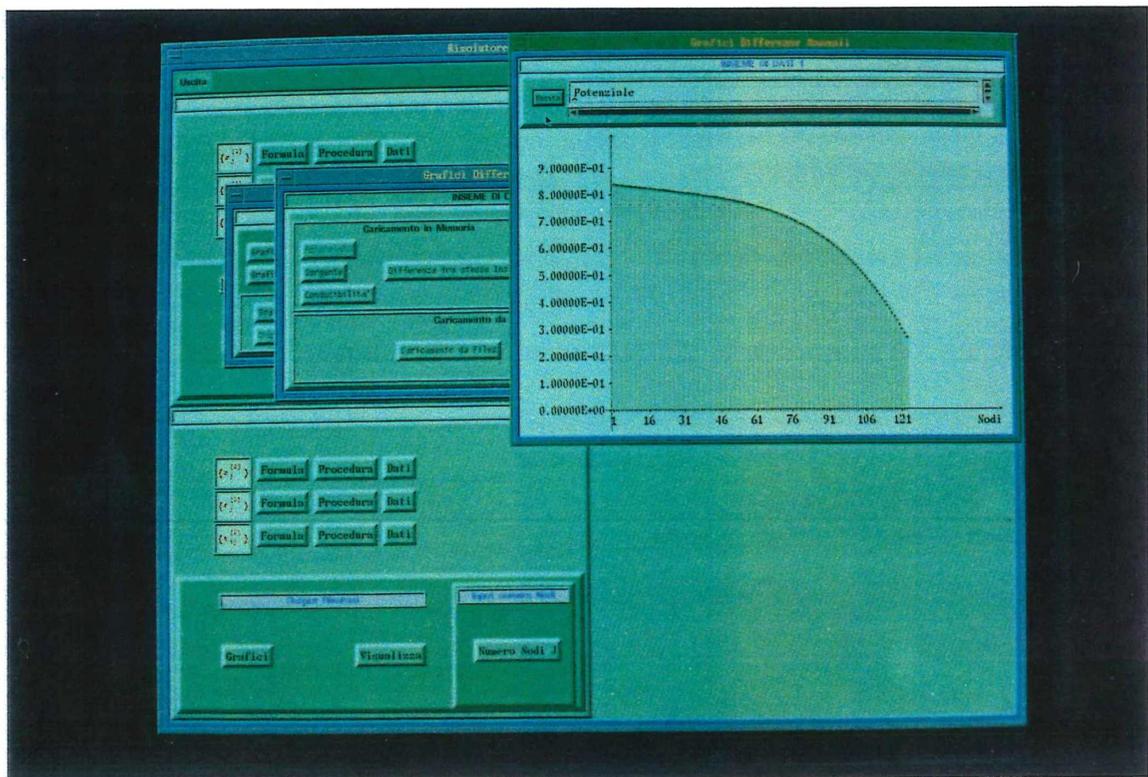


Fig. C.44 - Finestra Graf. Diff. manuali (da memoria - stesso dataset):  $(1/2)^j + j \cdot \sin(3)$  e  $\sin[\sin[1+j [j^2+1]]]$

Equazioni e disequazioni richieste dall'Esempio. Riferimenti minimi.

**2.1.2 - STIME DI STABILITA'**

Per ciascuna delle condizioni di unicità viste nel §.2.1.1. sussistono, sotto ulteriori ipotesi, le corrispondenti stime di stabilità.

**2.1.2.1 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy regolari**

Quando l' unicità è dovuta al dato di Cauchy fornito in un punto regolare, la stabilità viene stimata come segue.

**Teorema 2.2:**

Poniamo  $z, v \in \mathcal{X}$  così che le condizioni espresse dalla ( 2.17 ) siano verificate. In più consideriamo che valgano i seguenti limiti uniformi

$$\left| \frac{1}{z'} \right|, \left| \frac{1}{v'} \right| \leq c_v ; \tag{ 2.39 }$$

Poniamo che  $t, B$  soddisfino le condizioni  $t \in \mathcal{A}_{ad}$  e  $B \in \mathcal{B}_{ad}$  ( 2.18 ) e ( 2.19 ), rispettivamente. Allora si può applicare una stima uniforme a B:

$$\| B \|_{0, \infty} \leq ( 1 + 2 a_H ) c_v \| V \|_{\mathcal{X}} , \tag{ 2.40 }$$

$(Bv) = -(tv)'$ ;  $Bv' = -tv' + c$ ;  $e|_{x_0} = 0 = -tv'|_{x_0} + c$   $c = tv'|_{x_0}$   
 dove:  $Bv' = -t(v' - v'|_{x_0})$ ;  $B = - \frac{v' - v'|_{x_0}}{v'}$

$$\| V \|_{\mathcal{X}} = \max_D | V | + \| V_x \|_{0, \infty} \tag{ 2.41 }$$

$$\| B \|_{0, \infty} \leq 2a_H c_v \| v \|_{0, \infty} \leq 2a_H c_v \| v \|_{\mathcal{X}}$$

L'esposizione seguirà lo stesso schema di quella del caso continuo.

Si noti che, per semplicità e con abuso di notazione, si utilizzeranno gli stessi simboli riguardo le costanti e le norme nel discreto di quelli utilizzati nel caso continuo anche se nel caso discreto si considerano spazi finito-dimensionali mentre nel caso continuo spazi infinito-dimensionali.

**2.2.2.1 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy regolari**

Quando l'unicità è dovuta al dato di Cauchy fornito in un punto regolare, la stima nel caso continuo è data dal **Teorema 2.2** il corrispettivo discreto comporta di sostituire alle norme che compaiono nella ( 2.40 ) le loro espressioni basate sui rapporti incrementali.

Più in dettaglio,

- La costante  $a_H$  è per definizione il massimo dei valori della soluzione di riferimento:

$$a_H = \max |t_{ij}| \quad \forall i,j \text{ con } 1 \leq i,j < J, \text{ con } i=j-1, \quad (2.66)$$

- La costante  $c_V$  invece dipende dalla condizione di unicità alla quale ogni stima fa riferimento. Qui vale la ( 2.39 ) dove alla grandezza  $v'$  nel caso discreto si sostituisce il rapporto incrementale

$$(v_{i+1} - v_i) / h_{i,i+1} \quad \forall i. \quad (2.67)$$

ottenendo

$$\max |h_{i,i+1} / (v_{i+1} - v_i)| \quad \forall i \text{ con } 1 \leq i < J \quad (2.67.a)$$

- la norma  $\| V \|_{\mathcal{X}}$  nel continuo è formata da due addendi; il primo addendo  $( \max | V | )$  fa sì che la  $\| V \|_{\mathcal{X}}$  sia effettivamente una norma mentre il secondo addendo  $( \| V \|_{L^\infty} = \| V' \|_{0, \infty} )$  è una *seminorma* .

Ai fini di stimare la stabilità il termine  $\max | V |$  può essere eliminato.

Quindi nel discreto si sostituisce a  $\| V \|_{\mathcal{X}}$  la grandezza:

$$\max | ( V_{i+1} - V_i ) / h_{i,i+1} | \quad \forall i \ 1 \leq i \leq J \quad ( 2.68 )$$

- Alla norma  $\| B \|_{L^\infty} = \| B \|_{0, \infty}$  nel discreto si sostituisce

$$\max | ( b_i - a_i ) | \quad ( 2.69 )$$

Il risultato del **Teorema 2.3** nel continuo ( relativo ad unicità dovuta alla conoscenza di un punto stazionario della conducibilità ) si discretizza come segue:

- le costanti  $a_H$  e  $c_V$  con quelle definite sopra.
- la costante  $c_A$  definita nel caso continuo dalla ( 2.43 ) è il massimo modulo della derivata prima della soluzione di riferimento, che pertanto diviene:

$$c_A = \max | ( a_{i,i+1} - a_{i+1,i+2} ) / h_{i,i+1} | \quad ( 2.70 )$$

- la costante  $c_S$  definita dalla ( 2.42 ) è il massimo modulo della derivata seconda del potenziale  $v$  , che viene ora espressa da: