

Уточнение теоремы Хис-Брауна о квадратичных формах

Сергей Влэдуч¹, Андрей Дымов², Сергей Куксин³, and Альберто
Майокки⁴

¹Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373,
13453, Marseille, France & Институт проблем передачи
информации им. А.А. Харкевича РАН, Б. Каретный пер. 19,
Москва, Россия *

²Математический институт им. В.А. Стеклова Российской
академии наук, Москва, Россия & Национальный
исследовательский университет "Высшая Школа Экономики",
Москва, Россия & Сколковский институт науки и технологий,
Сколково, Россия[†]

³Université Paris Cité and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG,
Paris, France & Российский университет дружбы народов, Москва,
Россия, & Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия[‡]

⁴Università degli Studi di Milano–Bicocca, Italy [§]

Аннотация

В своей статье 1996 года о квадратичных формах Хис-Браун разработал версию кругового метода для подсчета числа точек пересечения неограниченной квадратики с решеткой короткого периода, когда каждой точке придан вес, и аппроксимировал эту величину интегралом от весовой функции по некоторой мере на квадрате. При этом весовая функция предполагается C_0^∞ - гладкой и обращающейся в нуль вблизи сингулярности квадратики. В нашей работе

*serge.vladuts@univ-amu.fr

†dymov@mi-ras.ru

‡kuksin@imj-prg.fr

§alberto.maiocchi@unimib.it

мы допускаем, чтобы весовая функция была конечно-гладкой, не занулялась на сингулярности и имела некоторое явное убывание на бесконечности.

В статье используется только элементарная теория чисел и она доступна для читателей без серьезных теоретико-числовых знаний.

1 Введение

1.1 Постановка задачи и результаты

Рассмотрим невырожденную квадратичную форму с целыми коэффициентами на \mathbb{R}^d , $d \geq 4$,

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}. \quad (1.1)$$

Можно считать, что матрица A – невырожденная симметричная с целыми элементами, а ее диагональные элементы четны. Если F знакоопределенная, то для $t \in \mathbb{R}$ квадрика

$$\Sigma_t = \{\mathbf{z} : F^t(\mathbf{z}) = 0\}, \quad F^t = F - t, \quad (1.2)$$

– либо эллипсоид, либо пустое множество. В знаконеопределенном случае Σ_t – неограниченная гиперповерхность в \mathbb{R}^d , гладкая для $t \neq 0$, а Σ_0 – конус с особенностью в начале координат.

Пусть \mathbb{Z}_L^d – решетка малого периода L^{-1} ,

$$\mathbb{Z}_L^d := L^{-1}\mathbb{Z}^d, \quad L \geq 1,$$

и пусть w – *регулярная* вещественная функция на \mathbb{R}^d ; это означает, что w и её преобразование Фурье $\hat{w}(\xi)$ являются непрерывными функциями, которые достаточно быстро убывают на бесконечности:

$$|w(\mathbf{z})| \leq C|\mathbf{z}|^{-d-\gamma}, \quad |\hat{w}(\xi)| \leq C|\xi|^{-d-\gamma}, \quad (1.3)$$

для некоторого $\gamma > 0$. Наша цель – изучить поведение рядов

$$N_L(w; A, m) := \sum_{\mathbf{z} \in \Sigma_m \cap \mathbb{Z}_L^d} w(\mathbf{z}),$$

где $m \in \mathbb{R}$ таково, что L^2m является целым числом.¹ Пусть

$$w_L(\mathbf{z}) := w(\mathbf{z}/L).$$

¹Например, $m = 0$, – этот случай для нас наиболее важен.

Тогда, очевидно,

$$N_L(w; A, m) = N_1(w_L; A, L^2m) =: N(w_L; A, L^2m). \quad (1.4)$$

Мы также будем писать $N_L(w; A) := N_L(w; A, 0)$ и $N(w_L; A) := N(w_L; A, 0)$. Для изучения $N_L(w; A, m)$ мы используем круговой метод в виде, предложенном Хис-Брауном [11]. Наши обозначения немного отличаются от тех, что используются в [11]. А именно, при масштабировании $z = z'/L$, $z' \in \mathbb{Z}^d$, мы интересуемся подсчетом (с весами) решений уравнения $F(z') = mL^2$, $z' \in \mathbb{Z}^d$, в то время как Хис-Браун записывает уравнение как $F(z') = m$, $z' \in \mathbb{Z}^d$, так что его m соответствует нашему L^2m .

Начнем с ключевого результата, который выражает дискретный аналог дельта-функции Дирака на \mathbb{Z} , т.е. функцию $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{для } n = 0 \\ 0 & \text{для } n \neq 0 \end{cases},$$

через своего рода представление Фурье. Этот результат восходит по крайней мере к Дьюку, Фридендеру и Иванцу [5] (ср. также [12]), и мы формулируем его в форме, приведенной в [11, теорема 1]; по сути дела, он заменяет тривиальное тождество $\delta(n) = \int_0^1 e^{2\pi i \alpha n} d\alpha$, используемое в обычном круговом методе. В приведенной ниже теореме для $q \in \mathbb{N}$ через e_q обозначается экспоненциальная функция $e_q(x) := e^{\frac{2\pi i x}{q}}$, а $\sum_{a \pmod{q}}^*$ обозначает суммирование по вычetaм a с $(a, q) = 1$, т.е. по всем целым числам $a \in [1, q-1]$, взаимно простым с q .

Теорема 1.1. *Для любого $Q \geq 1$ существует $c_Q > 0$ и гладкая функция $h(x, y) : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что*

$$\delta(n) = c_Q Q^{-2} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{a \pmod{q}}^* e_q(an) h\left(\frac{q}{Q}, \frac{n}{Q^2}\right). \quad (1.5)$$

Константа c_Q удовлетворяет условию $c_Q = 1 + O_N(Q^{-N})$ для любого $N > 0$, а функция h такова, что $h(x, y) \leq c/x$ и $h(x, y) = 0$ при $x > \max(1, 2|y|)$ (так что для каждого n сумма в (1.5) содержит лишь конечное число ненулевых членов).

Поскольку $N(\tilde{w}; A, t)$ можно записать как $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \tilde{w}(\mathbf{z}) \delta(F^t(\mathbf{z}))$, теорема 1.1 позволяет представить ряд $N(\tilde{w}; A, t)$ в виде повторной суммы.

Преобразуя эту сумму с использованием формулы суммирования Пуассона, как в [11, теорема 2], мы приходим к следующему результату:²

Теорема 1.2 ([11], теорема 2). *Для любой регулярной функции \tilde{w} , любого t и любого $Q \geq 1$ имеем*

$$N(\tilde{w}; A, t) = c_Q Q^{-2} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} S_q(\mathbf{c}) I_q^0(\mathbf{c}), \quad (1.6)$$

где

$$S_q(\mathbf{c}) = S_q(\mathbf{c}; A, t) := \sum_{a \pmod{q}}^* \sum_{\mathbf{b} \pmod{q}} e_q(a F^t(\mathbf{b}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.7)$$

и

$$I_q^0(\mathbf{c}) = I_q^0(\mathbf{c}; A, t, Q) := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{w}(\mathbf{z}) h\left(\frac{q}{Q}, \frac{F^t(\mathbf{z})}{Q^2}\right) e_q(-\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}) d\mathbf{z}. \quad (1.8)$$

Мы используем теорему 1.2 для анализа суммы $N(w_L; A, L^2 m) = N_L(w; A, m)$ при больших L , выбирая $\tilde{w} = w_L$, $t = L^2 m$ и $Q = L \geq 1$, и явно оценивая главные и остаточные члены по L в $S_q(\mathbf{c})$ и $I_q^0(\mathbf{c})$. Ответ будет сформулирован в терминах интеграла

$$\sigma_{\infty}(w) = \sigma_{\infty}(w; A, t) = \int_{\Sigma_t} w(\mathbf{z}) \mu^{\Sigma_t}(d\mathbf{z}) \quad (1.9)$$

(сингулярного при $t = 0$). Здесь $\mu^{\Sigma_t}(d\mathbf{z}) = |\nabla F(\mathbf{z})|^{-1} dz|_{\Sigma_t} = |A\mathbf{z}|^{-1} dz|_{\Sigma_t}$, где $dz|_{\Sigma_t}$ - элемент объема на Σ_t , индуцированный стандартной евклидовой структурой на \mathbb{R}^d , а A - симметричная матрица из уравнения (1.1). Для регулярных функций w этот интеграл сходится (см. раздел 7).

При записи асимптотики для $N_L(w; A, m)$ нам понадобятся следующие величины, где p пробегает все простые числа и $c \in \mathbb{Z}^d$:

$$\sigma_p^{\mathbf{c}} = \sigma_p^{\mathbf{c}}(A, L^2 m) := \sum_{l=0}^{\infty} p^{-dl} S_{p^l}(\mathbf{c}; A, L^2 m), \quad \sigma_p := \sigma_p^{\mathbf{0}}, \quad (1.10)$$

где $S_1 \equiv 1$,

$$\sigma_{\mathbf{c}}^*(A) := \prod_p (1 - p^{-1}) \sigma_p^{\mathbf{c}}(A, 0), \quad \sigma^*(A) := \sigma_{\mathbf{0}}^*(A) = \prod_p (1 - p^{-1}) \sigma_p(A, 0),$$

²В [11] приведенный ниже результат сформулирован для $\tilde{w} \in C_0^{\infty}$, но доказательство, основанное на формуле суммирования Пуассона, остается справедливым и для регулярных функций \tilde{w} .

и

$$\sigma(A, L^2 m) = \prod_p \sigma_p^0(A, L^2 m) = \prod_p \sigma_p(A, L^2 m). \quad (1.11)$$

Произведения в приведенных выше формулах берутся по всем простым числам. В асимптотиках, куда будут входить эти величины, они ограничены равномерно по L (см. теоремы 1.3 и 1.4, а также предложение 1.5).

Для функции $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ обозначим

$$\|f\|_{n_1, n_2} = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d} \max_{|\alpha|_1 \leq n_1} |\partial^\alpha f(\mathbf{z})| \langle \mathbf{z} \rangle^{n_2},$$

где $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_1 \leq k$, и $n_2 \in \mathbb{R}$. Здесь

$$\langle \mathbf{x} \rangle := \max\{1, |\mathbf{x}|\} \quad \text{для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l, \quad l \in \mathbb{N},$$

и $|\alpha|_1 \equiv \sum \alpha_j$ для любого целочисленного вектора $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$.

Через $\mathcal{C}^{n_1, n_2}(\mathbb{R}^d)$ обозначим линейное пространство C^{m_1} -гладких функций $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих $\|f\|_{n_1, n_2} < \infty$.

Заметим, что если $w \in \mathcal{C}^{d+1, d+1}(\mathbb{R}^d)$, то функция w регулярна, поэтому применима теорема 1.2. Действительно, первое соотношение в (1.3) очевидно. Для доказательства второго заметим, что для любого целочисленного вектора $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ имеем $\xi^\alpha \hat{w}(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|_1} \widehat{\partial_{\mathbf{x}}^\alpha w}(\xi)$. Но если $|\alpha|_1 \leq d+1$, то $|\partial_{\mathbf{x}}^\alpha w| \leq C \langle \mathbf{x} \rangle^{-d-1}$, поэтому $\widehat{\partial_{\mathbf{x}}^\alpha w}$ является L_1 -функцией. Таким образом, ее преобразование Фурье $\widehat{\partial_{\mathbf{x}}^\alpha w}$ – ограниченная непрерывная функция для каждого $|\alpha|_1 \leq d+1$, и второе соотношение в (1.3) также выполняется.

Теперь сформулируем наши основные результаты. Сначала рассмотрим случай $d \geq 5$.

Теорема 1.3. *Предположим, что $d \geq 5$. Тогда для любого $0 < \varepsilon \leq 1$ существуют положительные константы $K_1(d, \varepsilon)$, $K_2(d, \varepsilon)$ и $K_3(d, \varepsilon)$, где $K_2(d, \varepsilon) \leq K_3(d, \varepsilon)$, такие, что если $w \in \mathcal{C}^{K_1, K_2}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{0, K_3}(\mathbb{R}^d)$ и действительное число m удовлетворяет $L^2 m \in \mathbb{Z}$, то*

$$|N_L(w; A, m) - \sigma_\infty(w) \sigma(A, L^2 m) L^{d-2}| \leq C L^{d/2+\varepsilon} (\|w\|_{K_1, K_2} + \|w\|_{0, K_3}), \quad (1.12)$$

где константа C зависит от d, ε, m и A . Константа $\sigma(A, L^2 m)$ ограничена равномерно по L и m . В частности, если $\varepsilon = 1/2$, то можно взять $K_1 = 2d(d^2 + d - 1)$, $K_2 = 4(d+1)^2 + 3d + 1$ и $K_3 = K_1 + 3d + 4$.

Обратимся теперь к случаю $d = 4$, ограничившись ситуацией, когда $m = 0$.

Теорема 1.4. *Предположим, что $d = 4$ и $m = 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1/5$ существуют положительные константы $K_1(\varepsilon)$ и $K_2(\varepsilon)$, такие, что для $w \in \mathcal{C}^{K_1, K_2}(\mathbb{R}^d)$*

$$\begin{aligned} |N_L(w; A, 0) - \eta(0)\sigma_\infty(w)\sigma^*(A)L^{d-2}\log L - \sigma_1(w; A, L)L^{d-2}| \\ \leq C_0L^{d-2-\varepsilon}\|w\|_{K_1, K_2}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где константа C_0 зависит от ε и A . Константа $\eta(0)$ равна 1, если определитель $\det A$ представляет собой квадрат целого числа, и равна 0 в противном случае. Независимая от L константа $\sigma^*(A)$ конечна, а константа σ_1 допускает оценку

$$|\sigma_1(w; A, L)| \leq C_0\|w\|_{K_1, K_2}$$

равномерно по L . В случае квадратного определителя $\det A$, когда $\eta(0) = 1$, она задается формулой (1.24). В случае неквадратного определителя $\det A$, когда $\eta(0) = 0$ и член $\sigma_1(w; A, L)L^{d-2}$ дает асимптотику суммы N_L , константа $\sigma_1(w; A, L)$ не зависит от L и имеет вид

$$\sigma_1(w; A) = \sigma_\infty(w)L(1, \chi) \prod_p (1 - \chi(p)p^{-1})\sigma_p(A, 0), \quad (1.14)$$

где χ – символ Якоби $(\frac{\det(A)}{*})$ и $L(1, \chi)$ – значение L -функции Дирихле в единице.³

Если $\eta(0)\sigma^*(A) = 0$, то асимптотика (1.13) вырождается. Сходным образом, (1.12) также вырождается в верхнюю границу на N_L , если только мы не знаем, что $\sigma(A, L^{2m})$ допускает подходящую положительную нижнюю оценку для всех L . К счастью, требуемые нижние оценки часто выполняются, см. ниже предложение 1.5.

теоремы 1.3 и 1.4 уточняют теоремы 5, 6 и 7 из [11] в трех отношениях: во-первых, в нашей работе весовая функция w имеет конечную гладкость и достаточно быстро убывает на бесконечности, а в [11] $w \in C_0^\infty$. Во-вторых, мы явно указываем, каким образом остаточный член зависит от w . В-третьих, и это главное, мы снимаем условие, что носитель w не содержит начала координат, используемое в ряде важных результатов в [11]. Эти улучшения имеют для нас решающее значение, поскольку в нашей работе [7], посвященной проблеме волновой турбулентности, две

³Относительно классического понятия символа Якоби и L -функции Дирихле мы отсылаем читателя без теоретико-числовой подготовки к [15] и [13].

приведенные выше теоремы используются в ситуации, когда $w(0) \neq 0$ и носитель w не компактен. Похожая модификация метода Хис-Брауна была получена в [2, параграф 5] для работы над задачей усреднения, связанной с вопросами, рассмотренными в [7]. Помимо волновой турбулентности и усреднения, замена сумм по целым точкам квадратики интегралами, с тщательной оценкой остатков, используется в теории Колмогорова-Арнольда-Мозера для уравнений в частных производных, например, см. (С.2) в [9]. Публикации [9, 2, 7] появились недавно. Нам представляется, что в наши дни, когда исследователи в области УрЧП и динамических систем все чаще сталкиваются со сложными нелинейными явлениями с резонансами, необходимость работать с асимптотиками (1.12), (1.13) и их вариациями будет расти. В нашей статье используются только элементарные сведения из теории чисел и таким образом, она легко доступна читателям-аналитикам.

Отметим, что в статьях [10] и [16] суммы $N_L(w; A, m)$ рассматриваются для четных и нечетных размерностей d соответственно, без ограничения $w(0) \neq 0$, и в более общем контексте, чем наши теоремы 1.3 и 1.4. Однако в силу этой общности соответствующие константы в асимптотических (по L) формулах в [10] и [16] определяются весьма неявным образом (например, вопрос об их занулении весьма нетривиален). Связь этих констант с сингулярными интегралами типа (1.9) и зависимость остатков в асимптотике от весовой функции w , играющие ключевую роль в приложении к аналитическим проблемам, остаются неясными. Еще одна особенность [10, 16] заключается в использовании довольно продвинутой адельной техники, что затрудняет применение результатов и методов этой работы читателями, не обладающими серьезной теоретико-числовой подготовкой.

Remarks. 1) Теорема 1.3 является уточнением теоремы 5 из [11], а теорема 1.4 уточняет теоремы 6 и 7 из [11]. В [11] также содержится некоторая информация об асимптотическом по L поведении сумм $N_L(w; A, m)$ при $d = 4$, $m \neq 0$ и $d = 3$, $m = 0$. Поскольку наше доказательство теорем 1.3 и 1.4 основано на идеях из [11], дополненных теоремой 7.3, справедливой для $d \geq 3$, то, вероятно, наш подход позволяет обобщить вышеупомянутые результаты [11] для $d = 3, 4$ на случай $w \in \mathcal{C}^{K_1, K_2}(\mathbb{R}^d)$ с подходящими K_1, K_2 .

2) В нашей работе зависимость констант в оценках от m равномерна на компактных интервалах, а зависимость от оператора A выражается только через нормы A и A^{-1} .

3) Значения констант $K_j(d, \varepsilon)$ в (1.12), приведенные в теореме 1.3, далеки от оптимальных, и мы не ставили перед собой цель оптимизировать их.

4) Так как доказательство теорем основано на представлении (1.6), то функция w должна быть регулярной (см. (1.3)), что верно, если $w \in \mathcal{C}^{d+1, d+1}$ и выполняется при достаточно больших константах K_1, K_2 . Например, это верно для K_1 и K_2 , фигурирующих в последней строке формулировки теоремы 1.3.

Краткое обсуждение доказательств. Мы приводим полностью только доказательство теоремы 1.3, которое напоминает доказательство теоремы 5 из [11] с дополнительным контролем зависимости констант от w . Существенное отличие от аргументации Хис-Брауна проявляется в разделах 3 и 4, где мы не предполагаем, что функция w обращается в нуль вблизи начала координат, тогда как последнее предположение имеет решающее значение при анализе интегралов в разделах 6 и 7 работы [11]. Чтобы справиться с этой трудностью, которая становится очевидной, например, в предложении 3.8, нам приходится исследовать гладкость в нуле функции

$$t \mapsto \sigma_\infty(w; A, t) \quad (1.15)$$

и ее убывание на бесконечности. Соответствующий анализ выполнен в разделе 7. Там, используя методы, разработанные в [6] для изучения интегралов (1.9), доказывается, что функция (1.15) является $(\lceil d/2 \rceil - 2)$ -гладкой, но при четном d ее производная порядка $(d/2 - 1)$ может иметь логарифмическую особенность в нуле. Там же мы оцениваем скорость убывания функции (1.15) на бесконечности.

Доказательство теоремы 1.4 сходно с доказательством теорем 6 и 7 из [11], дополненным предложением 3.8, которое основано на результате раздела 7. Поэтому мы ограничиваемся лишь наброском доказательства теоремы, приведенным в разделе 1.3 в параллель со схемой доказательства теоремы 1.3, в котором мы указываем основные различия между двумя доказательствами. При выводе теоремы 1.4 мы используем без доказательства некоторые результаты из [11] (а именно, леммы 30 и 31).

Нижние оценки констант в асимптотике. Обсудим теперь нижние оценки констант $\sigma(A, L^2 t)$ и $\sigma^*(A)$ из теорем 1.3 и 1.4.

Предложение 1.5. (i) Если $d \geq 5$, то существуют положительные постоянные $c(A) < C(A)$ такие, что $0 < c(A) \leq \sigma(A, L^2 t) \leq C(A) < \infty$ для любой невырожденной матрицы A , равномерно по L и t .

(ii) Если $d = 4$ и $t = 0$, то $\sigma^*(A) > 0$ для любой невырожденной матрицы A такой, что соответствующее уравнение $2F(\mathbf{z}) = \mathbf{Az} \cdot \mathbf{z} = 0$ имеет нетривиальные решения в каждом p -адическом поле (в частности, это верно, если уравнение имеет нетривиальное решение в \mathbb{Z}^4).

См. теоремы 4, 6 и 7 из [11]. Мы не доказываем этот результат, а лишь отмечаем, что его обоснование использует уточнение вычисления во второй части доказательства леммы 2.3. В то время как лемма дает верхнюю границу искомой величины, более тщательный анализ позволяет также установить заявленные нижние границы.

В приложении В мы даем по существу полное вычисление, доказывающее предложение 1.5 в случае простейшей квадратичной формы $F = \sum_{i=1}^{d/2} x_i y_i$, $d = 2s \geq 4$ и $m = 0$. Доказательство предложения для произвольной A может следовать той же схеме, заменяя явные формулы некоторыми общими результатами (например, леммой Гензеля).

Неоднородные квадратичные многочлены. Рассмотрим теперь неоднородный квадратичный полином \mathcal{F} , однородная компонента степени 2 которого равна F в (1.1):

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} A \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z}_* \cdot \mathbf{z} + \tau, \quad \mathbf{z}_* \in \mathbb{R}^d, \tau \in \mathbb{R},$$

и соответствующее множество $\Sigma^{\mathcal{F}} = \{\mathbf{z} : \mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0\}$; положим

$$N_L(w; \mathcal{F}) = \sum_{\mathbf{z} \in \Sigma^{\mathcal{F}} \cap \mathbb{Z}_L^d} w(\mathbf{z}).$$

Обозначим

$$\mathfrak{z} = A^{-1} \mathbf{z}_*, \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathfrak{z}, \quad m = \frac{1}{2} \mathfrak{z} \cdot A \mathfrak{z} - \tau,$$

и предположим, что $\mathfrak{z} \in \mathbb{Z}_L^d$ ⁴ и $L^2 \tau \in \mathbb{Z}$. Тогда условия $L^2 m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{z}' \in \mathbb{Z}_L^d$ равносильны условиям $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_L^d$, и $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}') - m$. Полагая $w^{\mathfrak{z}}(\mathbf{z}') = w(\mathbf{z}' - \mathfrak{z})$ получаем $N_L(w; \mathcal{F}) = N_L(w^{\mathfrak{z}}; A, m)$. При этом

$$st \quad \sigma_{\infty}(w^{\mathfrak{z}}; A, m) = \int_{\Sigma_m} w^{\mathfrak{z}}(\mathbf{z}') \frac{d\mathbf{z}'|_{\Sigma_m}}{|\nabla F(\mathbf{z}')|} = \int_{\Sigma^{\mathcal{F}}} w(\mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}|_{\Sigma^{\mathcal{F}}}}{|\nabla \mathcal{F}(\mathbf{z})|} =: \sigma_{\infty}(w; \mathcal{F}),$$

и мы приходим к следующему следствию из теоремы 1.3:

Следствие 1.6. *Если $d \geq 5$, квадратичная форма F такая же, как в теореме 1.3, \mathcal{F} – неоднородная квадратичная форма, определенная выше, а L удовлетворяет условиям $\mathfrak{z} := A^{-1} \mathbf{z}_* \in \mathbb{Z}_L^d$, $\tau L^2 \in \mathbb{Z}$, то для любого $0 < \varepsilon \leq 1$ и $w \in \mathcal{C}^{K_1, K_2}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{0, K_3}(\mathbb{R}^d)$ имеем*

$$\left| N_L(w; \mathcal{F}) - \sigma_{\infty}(w; \mathcal{F}) \sigma(A, L^2 m) L^{d-2} \right| \leq C L^{d/2+\varepsilon} (\|w\|_{K_1, K_2} + \|w\|_{0, K_3}).$$

Здесь константы K_1, K_2, K_3 зависят от d и ε , а C зависят от d, ε, A и $\tau, |\mathbf{z}_*|$.

⁴Это верно, например, если $\det A = \pm 1$ и $\mathbf{z}_* \in \mathbb{Z}_L^d$.

Обозначения и соглашения. Мы пишем $A \lesssim_{a,b} B$, если $A \leq CB$, где константа C зависит от a и b . Аналогично, $O_{a,b}(\|w\|_{m_1, m_2})$ означает величину, ограниченную по модулю $C(a, b)\|w\|_{m_1, m_2}$. Зависимость от матричных норм $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ и от размерности d не указывается, так как большинство наших оценок зависит от этих величин.

Всегда предполагается, что функция w принадлежит пространству $\mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R}^d)$ с достаточно большими m, n . Если в формулировке утверждения используется норма $\|w\|_{a,b}$, то предполагается, что $w \in \mathcal{C}^{a,b}(\mathbb{R}^d)$.

Мы обозначаем $e_q(x) = e^{2\pi i x/q}$ и пишем $e_1(x) =: e(x)$. Через $[\cdot]$ обозначается функция $[x] = \min_{n \in \mathbb{Z}} \{n \geq x\}$. Через \mathbb{N} обозначается множество натуральных чисел (≥ 1).

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору Хис-Брауну за ценные советы, касающиеся его статьи [11].

Работа АД выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 20-41-09009 [разделы 1-7] и гранта президента Российской Федерации МК-1999.2021.1.1 [разделы А-С]. Работа СК и АМ поддержана грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

1.2 Схема доказательства теоремы 1.3

Пусть $d \geq 5$. Как уже обсуждалось, если w удовлетворяет условиям теоремы с достаточно большими константами K_i , то w регулярна в смысле раздела 1.1 и поэтому применима теорема 1.2. Тогда, согласно (1.6) и (1.4),

$$N_L(w; A, m) = c_L L^{-2} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} S_q(\mathbf{c}) I_q(\mathbf{c}), \quad (1.16)$$

где сумма $S_q(\mathbf{c}) = S_q(\mathbf{c}; A, L^2 m)$ задается выражением (1.7) с $t = L^2 m$, а интеграл $I_q(\mathbf{c})$ – выражением (1.8) с $\tilde{w} = w_L$, $Q = L$ и $t = L^2 m$,

$$I_q(\mathbf{c}; A, m, L) := \int_{\mathbb{R}^d} w\left(\frac{\mathbf{z}}{L}\right) h\left(\frac{q}{L}, \frac{F L^2 m(\mathbf{z})}{L^2}\right) e_q(-\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}) d\mathbf{z}. \quad (1.17)$$

Обозначая

$$n(\mathbf{c}; A, m, L) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} S_q(\mathbf{c}) I_q(\mathbf{c}),$$

получаем $N_L(w; A, m) = c_L L^{-2} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d} n(\mathbf{c})$. Тогда для любой $\gamma_1 \in (0, 1/2)$ ряд N_L записывается в виде

$$N_L(w; A, m) = c_L L^{-2} (J_0 + J_{<}^{\gamma_1} + J_{>}^{\gamma_1}), \quad (1.18)$$

где

$$J_0 := n(0), \quad J_{<}^{\gamma_1} := \sum_{\mathbf{c} \neq 0, |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} n(\mathbf{c}), \quad J_{>}^{\gamma_1} := \sum_{|\mathbf{c}| > L^{\gamma_1}} n(\mathbf{c}). \quad (1.19)$$

Из предложения 5.1 (являющегося модификацией лемм 19 и 25 из [11]) следует, что

$$|J_{>}^{\gamma_1}| \lesssim_{\gamma_1, m} \|w\|_{N_0, 2N_0 + d + 1}$$

с $N_0 := \lceil d + (d+1)/\gamma_1 \rceil$ (см. следствие 5.2). В предложении 6.1, следуя леммам 22 и 28 из [11], показывается, что

$$|J_{<}^{\gamma_1}| \lesssim_{\gamma_1, m} L^{d/2+2+\gamma_1(d+1)} (\|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}), \quad (1.20)$$

$$\bar{N} = \lceil d^2/\gamma_1 \rceil - 2d.$$

Для анализа члена J_0 запишем его в виде $J_0 = J_0^+ + J_0^-$, где

$$J_0^+ := \sum_{q > \rho L} q^{-d} S_q(0) I_q(0), \quad J_0^- := \sum_{q \leq \rho L} q^{-d} S_q(0) I_q(0), \quad (1.21)$$

с $\rho = L^{-\gamma_2}$ для некоторой $0 < \gamma_2 < 1$, подлежащей определению. Лемма 4.2, представляющая собой комбинацию лемм 16 и 25 из [11], модифицированных с использованием результатов раздела 7, влечет оценку

$$\left| J_0^+ \right| \lesssim L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-1)} |w|_{L^1} \lesssim L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-1)} \|w\|_{0, d+1}.$$

Наконец, в лемме 4.3, являющейся комбинацией леммы 13 и упрощенной леммы 31 из [11] с результатами из раздела 7, устанавливается, что J_0^- равно

$$L^d \sigma_\infty(w) \sigma(A, L^2 m) + O_{\gamma_2, m} \left((\|w\|_{d/2-2, d-1} + \|w\|_{0, d+1}) L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-2)} \right)$$

(см. (1.9) и (1.11)). Тожество (1.18) вместе с приведенными выше оценками дает желаемый результат, если положить $\gamma_2 = \varepsilon/(d/2 - 1)$ и $\gamma_1 = \varepsilon/(d+1)$. Равномерная по L и m ограниченность произведения $\sigma(A, L^2 m)$ следует из леммы 2.3.

1.3 Схема доказательства теоремы 1.4

В этом разделе мы предполагаем, что $d = 4$ и $m = 0$. Доказательство проводится точно так же, как в предыдущем разделе, вплоть до формулы (1.20), недостаточно точной для случая $d = 4$, в котором ее правую часть следует заменить на

$$\left| J_{<}^{\gamma_1} - L^d \sum_{\mathbf{c} \neq 0} \eta(\mathbf{c}) \sigma_{\mathbf{c}}^*(A) \sigma_{\infty}^{\mathbf{c}}(w; A, L) \right| \lesssim_{\gamma_1} L^{7/2+(d+4)\gamma_1} \|w\|_{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2} \quad (1.22)$$

для подходящих констант \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 . Здесь члены $\sigma_{\mathbf{c}}^*(A)$ определяются в (1.10), члены $\sigma_{\infty}^{\mathbf{c}}(w; A)$ задаются формулой

$$\sigma_{\infty}^{\mathbf{c}}(w; A, L) := L^{-d} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-1} I_q(\mathbf{c}; A, 0, L), \quad (1.23)$$

а константы $\eta(\mathbf{c}) \in \{0, 1\}$ определены в лемме А.1. В частности, $\eta(0) = 1$, если определитель $\det A$ является квадратом целого числа, и $\eta(0) = 0$ в противном случае. Доказательство оценки (1.22) использует лемму А.1 (лемма 30 из [11]), включая лишь незначительные модификации рассуждений из [11], и мы оставляем его читателю.

Оценку для J_0 также приходится уточнять, и это делается в приложении А. Мы рассматриваем только случай, когда определитель $\det A$ является квадратом целого числа, в частности, $\eta(0) = 1$. Противоположный случай может быть получен незначительной модификацией последнего, следующей [11] (см. обсуждение в приложении А). В предложении А.3, являющемся комбинацией лемм 13, 16 и 31 из [11], модифицированной с использованием предложения 3.8, мы доказываем, что в случае квадратного определителя $\det A$

$$J_0 = \sigma_{\infty}(w) \sigma^*(A) L^d \log L + K(0) L^d + O_{\varepsilon}(L^{d-\varepsilon} (\|w\|_{d/2-2, d-1} + \|w\|_{0, d+1})),$$

где константа $K(0) = K(0; w, A)$ определена в разделе А.1. Тожество (1.18) вместе с приведенными выше оценками снова дает желаемый результат, если мы выберем $\gamma_1 = (\frac{1}{2} - \varepsilon)/(d + 4)$ и положим

$$\sigma_1(w; A, L) := K(0) + \sum_{\mathbf{c} \neq 0} \eta(\mathbf{c}) \sigma_{\mathbf{c}}^*(A) \sigma_{\infty}^{\mathbf{c}}(w; A, L). \quad (1.24)$$

Конечность произведений $\sigma_{\mathbf{c}}^*(A)$ следует из леммы А.2, а заявленная в теореме оценка для константы $\sigma_1(w; A, L)$ установлена в разделе А.3.

2 Суммы S_q

Мы начинаем доказательство теоремы 1.3, следуя схеме, предложенной в разделе 1.2. В части утверждений, составляющих доказательство, ограничение $d \geq 5$ не используется, и далее мы всегда указываем реальные требования к d . Напомним, что зависимость констант, возникающих в оценках, от d и A явно не указывается (см. раздел *Обозначения и соглашения*).

В настоящем параграфе мы анализируем суммы $S_q(\mathbf{c}) = S_q(\mathbf{c}; A, L^2m)$, входящие, в частности, в определения сингулярных рядов $\sigma(A, L^2m)$ и $\sigma_p(A, L^2m)$.

Лемма 2.1 (лемма 25 в [11]). *Для любого $d \geq 1$ выполнена оценка $|S_q(\mathbf{c}; A, L^2m)| \lesssim q^{d/2+1}$, равномерно по $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d$.*

Доказательство. Согласно (1.7) и неравенству Коши-Буняковского,

$$\begin{aligned} |S_q(\mathbf{c})|^2 &\leq \phi(q) \sum_{a(\bmod q)}^* \left| \sum_{\mathbf{b}(\bmod q)} e_q(aF^{L^2m}(\mathbf{b}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \right|^2 \\ &= \phi(q) \sum_{a(\bmod q)}^* \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}(\bmod q)} e_q(a(F^{L^2m}(\mathbf{u}) - F^{L^2m}(\mathbf{v})) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\phi(q)$ — функция Эйлера. Так как $F^t(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} - t$,

$$F^{L^2m}(\mathbf{u}) - F^{L^2m}(\mathbf{v}) = (A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + F(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} + F(\mathbf{w}).$$

Соответственно,

$$e_q(a(F^{L^2m}(\mathbf{u}) - F^{L^2m}(\mathbf{v})) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})) = e_q(aF(\mathbf{w}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) e_q(a\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w}).$$

Последнее равенство показывает, что суммирование по \mathbf{v} в (2.1) может дать ненулевой вклад, только если каждая компонента вектора $A\mathbf{w}$ делится на q . Это свойство выполняется не более чем для конечного числа N векторов \mathbf{w} , зависящего только от $\det A$. Следовательно,

$$|S_q(\mathbf{c})|^2 \lesssim \phi(q) \sum_{a(\bmod q)}^* \sum_{\mathbf{v}(\bmod q)} 1 \leq \phi^2(q) q^d.$$

□

Лемма 2.1 влечет конечность сумм $\sigma_p^{\mathbf{c}}$, определенных в (1.10):

Следствие 2.2. При $d \geq 5$, для каждого простого числа p выполнено $|\sigma_p^c(A, L^2m)| \lesssim 1$.

Напомним, что $\sigma(A, L^2m) = \prod_p \sigma_p(A, L^2m)$ (см. (1.11)).

Лемма 2.3. При $d \geq 5$ для любого $1 \leq X \leq \infty$ выполнено

$$\sum_{q \leq X} q^{-d} S_q(0) = \sigma(A, L^2m) + O(X^{-d/2+2}).$$

В частности, $\sigma(A, L^2m) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} S_q(0)$, так что $|\sigma(A, L^2m)| \lesssim 1$ в силу леммы 2.1.

Доказательство. Докажем сперва некоторое свойство мультипликативности тригонометрических сумм:

$$S_{qq'}(0) = S_q(0)S_{q'}(0), \quad (2.2)$$

если $(q, q') = 1$ (см. лемму 23 в [11]). По определению

$$S_{qq'}(0) = \sum_{a \pmod{qq'}}^* \sum_{\mathbf{v} \pmod{qq'}} e_{qq'}(aF^{L^2m}(\mathbf{v})).$$

Если $(q, q') = 1$, мы можем заменить суммирование по $a \pmod{qq'}$ двойным суммированием по a_q по модулю q и по $a_{q'}$ по модулю q' , записав $a = qa_{q'} + q'a_q$. Тогда

$$S_{qq'}(0) = \sum_{a_q \pmod{q}}^* \sum_{a_{q'} \pmod{q'}}^* \sum_{\mathbf{v} \pmod{qq'}} e_q(a_q F^{L^2m}(\mathbf{v})) e_{q'}(a_{q'} F^{L^2m}(\mathbf{v})).$$

Теперь заменим суммирование по $\mathbf{v} \pmod{qq'}$ двойным суммированием по \mathbf{v}_q по модулю q и по $\mathbf{v}_{q'}$ по модулю q' , записав $\mathbf{v} = q\bar{q}\mathbf{v}_{q'} + q'\bar{q}'\mathbf{v}_q$, где \bar{q} и \bar{q}' определяются из соотношений $q\bar{q} = 1 \pmod{q'}$ и $q'\bar{q}' = 1 \pmod{q}$. Тогда мы получаем

$$F^{L^2m}(\mathbf{v}) = q^2\bar{q}^2 F(\mathbf{v}_{q'}) + q'^2\bar{q}'^2 F(\mathbf{v}_q) + q\bar{q}q'\bar{q}' A\mathbf{v}_{q'} \cdot \mathbf{v}_q - L^2m,$$

так что

$$e_q(a_q F^{L^2m}(\mathbf{v})) = e_q(a_q q'^2 \bar{q}'^2 F(\mathbf{v}_q) - a_q L^2m) = e_q(a_q F^{L^2m}(\mathbf{v}_q)),$$

по определению \bar{q}' и поскольку $e_q(qN) = 1$ для любого целого числа N . Аналогично,

$$e_{q'}(a_{q'} F^{L^2m}(\mathbf{v})) = e_{q'}(a_{q'} F^{L^2m}(\mathbf{v}_{q'})).$$

Таким образом мы получаем (2.2).

Далее заметим, что в силу леммы 2.1

$$\sum_{q \geq X} q^{-d} |S_q(0)| \lesssim \sum_{q \geq X} q^{-d/2+1} \lesssim X^{-d/2+2}. \quad (2.3)$$

Согласно (2.2) и определению σ ,

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n, \quad \sigma^n = \prod_{p \leq n} \sum_{l=0}^n p^{-dl} S_{p^l}(0) = \sum_{q \in P_n} q^{-d} S_q(0),$$

где p — простые числа, а P_n обозначает множество натуральных чисел q , разложение которых на простые множители имеет вид $q = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, где $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_m \leq n$, $k_j \leq n$ и $m \geq 0$ ($m = 0$ соответствует $q = 1$). Так как любое $q \leq n$ принадлежит P_n , то согласно (2.3),

$$\left| \sum_{q \in P_N} q^{-d} S_q(0) - \sum_{q \leq X} q^{-d} S_q(0) \right| \lesssim X^{-d/2+2} \quad \forall N \geq X,$$

для любого конечного $X > 0$. Переходя в этой оценке к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем требуемое утверждение для случая $X < \infty$. После чего для случая $X = \infty$ оно следует очевидным образом. \square

3 Сингулярные интегралы I_q^0

3.1 Свойства функции $h(x, y)$

В этом разделе, следуя параграфу 3 в [11], мы строим и исследуем функцию $h(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ из теоремы 1.1. Рассмотрим функцию $w_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$w_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{если } |x| < 1 \\ 0, & \text{если } |x| \geq 1 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Обозначим $c_0 := \int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) dx$ и введем сдвинутую весовую функцию

$$\omega(x) = \frac{4}{c_0} w_0(4x - 3),$$

которая, разумеется, принадлежит классу $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Очевидно, $0 \leq \omega \leq 4e^{-1}/c_0$, носитель ω лежит в $(1/2, 1)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$.

Определим искомую функцию $h : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в терминах ω , а именно, равенством $h(x, y) := h_1(x) - h_2(x, y)$, где

$$h_1(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^j} \omega(x^j), \quad h_2(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^j} \omega\left(\frac{|y|}{x^j}\right). \quad (3.2)$$

Для любой фиксированной пары (x, y) каждая из двух сумм по j содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Следовательно, функция h гладкая.

В разделе 3 работы [11] показано, как вывести теорему 1.1 из определения (3.2).⁵ Мы же ограничиваемся формулировкой некоторых свойств функции h , доказанных в [11, раздел 4]. В частности, они влекут, что при малых x функция $h(x, y)$ ведет себя как дельта-функция в точке y .

Лемма 3.1 (лемма 4 из [11]). *Выполнены следующие соотношения:*

1. $h(x, y) = 0$ при $x \geq 1$ и $|y| \leq x/2$.
2. Если $x \leq 1$ и $|y| \leq x/2$, то $h(x, y) = h_1(x)$, и для любого $m \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^m h(x, y)}{\partial x^m} \right| \lesssim_m \frac{1}{x^{m+1}}.$$

3. Если $|y| \geq x/2$, то для любых $m, n \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^{m+n} h(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right| \lesssim_{m,n} \frac{1}{x^{m+1} |y|^n}.$$

Лемма 3.2 (лемма 5 из [11]). *Пусть $m, n, N \geq 0$. Тогда для любых x, y*

$$\left| \frac{\partial^{m+n} h(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right| \lesssim_{N,m,n} \frac{1}{x^{1+m+n}} \left(\delta(n) x^N + \min \left\{ 1, (x/|y|)^N \right\} \right).$$

Лемма 3.2 с $m = n = N = 0$ немедленно влечет

Следствие 3.3. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>} \times \mathbb{R}$ имеет место оценка $|h(x, y)| \lesssim 1/x$.*

Лемма 3.4 (лемма 6 из [11]). *Пусть $X \in \mathbb{R}_{>0}$ и $0 < x < C \min \{1, X\}$, для какой-нибудь постоянной $C > 0$. Тогда для всех $N \geq 0$,*

$$\int_{-X}^X h(x, y) dy = 1 + O_{N,C}(Xx^{N-1}) + O_{N,C}\left(\frac{x^N}{X^N}\right).$$

⁵Точнее, там доказано, что любая функция h , заданная равенством (3.2) с произвольной весовой функцией $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, имеющей носитель в отрезке $[1/2, 1]$, дает желаемое представление $\delta(n)$.

Лемма 3.5 (лемма 8 из [11]). Пусть $X \in \mathbb{R}_{>0}$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть также $x < C \min \{1, X\}$ для некоторого $C > 0$. Тогда

$$\left| \int_{-X}^X y^n h(x, y) dy \right| \lesssim_{N,C} X^n \left(Xx^{N-1} + \frac{x^N}{X^N} \right).$$

Результаты, сформулированные выше, используются в доказательстве ключевой леммы 9 работы [11], которую мы уточняем следующим образом.

Лемма 3.6. Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{C}^{M-1,0}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $M \geq 1$, такую что ее $(M-1)$ -ая производная $f^{(M-1)}$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$, и пусть $0 < x \leq C$ для некоторой постоянной $C > 0$. Тогда для произвольных $0 < \beta \leq 1$ и $N \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y)h(x, y) dy &= f(0) + O_M \left(\frac{x^M}{\beta^{M+1}} \frac{1}{X} \int_{-X}^X |f^{(M)}(y)| dy \right) \\ &+ O_{N,C} \left((x^N + \beta^N) (\|f\|_{M-1,0} + x^{-1}|f|_{L_1}) \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $X := \min \{1, x/\beta\}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2 с $m = n = 0$, для любого $N \geq 0$ выполнено $|h(x, y)| \lesssim_N (x^N + \beta^N)x^{-1}$, если $|y| \geq X$. Следовательно, "хвост" интеграла $\int fh dy$ может быть ограничен следующим образом:

$$\left| \int_{|y| \geq X} f(y)h(x, y) dy \right| \lesssim_N (x^N + \beta^N)x^{-1} \int_{|y| \geq X} |f(y)| dy \lesssim_N (x^N + \beta^N)x^{-1} |f|_{L_1}. \quad (3.4)$$

Для анализа интеграла по промежутку $|y| < X$ мы используем разложение Тейлора функции $f(y)$ в нуле:

$$\begin{aligned} \int_{-X}^X f(y)h(x, y) dy &= \sum_{j=0}^{M-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \int_{-X}^X y^j h(x, y) dy \\ &+ O_M \left(\frac{X^M}{x} \int_{-X}^X |f^{(M)}(y)| dy \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где мы также использовали следствие 3.3. Далее мы применяем лемму 3.4, в которой N заменено на $N+1$, и находим что

$$f(0) \int_{-X}^X h(x, y) dy = f(0) + O_{N,C} \left(\|f\|_{0,0} \left(Xx^N + \frac{x^{N+1}}{X^{N+1}} \right) \right), \quad (3.6)$$

в то время как согласно лемме 3.5 для любого $j > 0$ выполнено

$$\left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \int_{-X}^X y^j h(x, y) dy \right| \lesssim_{N, j, C} \|f\|_{j, 0} X^j \left(X x^N + \frac{x^{N+1}}{X^{N+1}} \right). \quad (3.7)$$

Объединяя соотношения (3.4)–(3.7), мы получаем искомую оценку. Действительно, поскольку $X \leq x/\beta$, то член O_M в (3.5) ограничен аналогичным членом в (3.3). Кроме того, так как $(x/X)^{N+1} = \max(x^{N+1}, \beta^{N+1}) \lesssim_C C x^N + \beta^N$, то выражения в скобках из (3.6) и (3.7) удовлетворяют $\lesssim_C x^N + \beta^N$. Здесь мы использовали соотношение $X \leq 1$. \square

Лемма 3.6 нужна для доказательства теоремы 1.4, в то время как для доказательства теоремы 1.3 достаточно ее упрощенной версии:

Следствие 3.7. *Допустим, что интегрируемая функция f лежит в классе $\mathcal{C}^{M, 0}(\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{N}$, и $0 < x \leq C$ для некоторой постоянной $C > 0$. Тогда, для любой $0 < \delta < 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) h(x, y) dy = f(0) + O_{M, C, \delta} \left(x^{M-\delta} (\|f\|_{M, 0} + |f|_{L_1}) \right).$$

Доказательство. Желаемое утверждение следует из леммы 3.6 выбором $\beta = x^{\delta/(M+1)}$ при $x \leq 1$, и $\beta = 1$ при $x > 1$. Действительно, в этом случае для $0 < x \leq 1$ имеем $x^M \beta^{-(M+1)} = x^{M-\delta}$ и

$$(x^N + \beta^N) x^{-1} \leq 2\beta^N x^{-1} \leq 2x^{M-\delta}, \quad \text{если } N \geq N_\delta = (M-\delta+1)(M+1)/\delta.$$

Для $1 \leq x \leq C$ имеем $x^M \leq C^\delta x^{M-\delta}$, так что взяв $N = 0$ получаем, что $(x^N + 1) = 2 \leq 2x^{M-\delta}$. Теперь требуемое утверждение следует из полученных соотношений. \square

3.2 Асимптотика интеграла $I_q(0)$

В дальнейшем будет удобно записать интеграл $I_q(\mathbf{c}; A, L^2 m)$ в виде

$$I_q(\mathbf{c}) = L^d \tilde{I}_q(\mathbf{c}), \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{I}_q(\mathbf{c}) = \tilde{I}_q(\mathbf{c}; A, m, L) = \int_{\mathbb{R}^d} w(\mathbf{z}) h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right) e_q(-\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}L) d\mathbf{z}. \quad (3.9)$$

Следующее предложение заменяет леммы 11, 13 и теорему 3 из [11]. В отличие от тех результатов мы не предполагаем, что $0 \notin \text{supp } w$. Поскольку

при $\mathbf{c} = 0$ экспонента e_q в определении интеграла $I_q(\mathbf{c})$ равна единице, мы можем рассматривать $I_q(0)$ как функцию вещественного аргумента $q \in \mathbb{R}$, как мы и делаем в предложении ниже; это нам понадобится в приложении А.

Предложение 3.8. *Предположим, что $q \in \mathbb{R}$ и $q \leq CL$ для некоторой постоянной $C > 0$.*

a) *Если $d \geq 5$ и $\mathbb{N} \ni M < d/2 - 1$, то для произвольной $\delta > 0$,*

$$I_q(0; A, m, L) = L^d \sigma_\infty(w; A, m) + O_{m, M, C, \delta} \left(q^{M-\delta} L^{d-M+\delta} \|w\|_{M, d+1} \right). \quad (3.10)$$

b) *Если $d = 4$, $\mathbb{N} \ni M \leq d/2 - 1$ и $m = 0$, то для произвольных $0 < \beta \leq 1$ и $N \geq 0$,*

$$I_q(0; A, 0, L) = L^d \sigma_\infty(w; A, 0) + O \left(\beta^{-M-1} q^M L^{d-M} \left\langle \log \left(\frac{q}{L\beta} \right) \right\rangle \|w\|_{M, d+1} \right) + O_{C, N} \left((q^N L^{d-N} + \beta^N) (\|w\|_{M-1, d+1} + Lq^{-1} \|w\|_{0, d+1}) \right). \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть $d \geq 4$. Применяя формулу Кронрода-Федерера (см. [3], раздел 3.2.4) мы представляем интеграл в (3.9) с $c = 0$ как интеграл по гиперповерхности Σ_t :

$$\tilde{I}_q(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}(m+t) h(q/L, t) dt, \quad \mathcal{I}(t) = \int_{\Sigma_t} w(\mathbf{z}) \mu^{\Sigma_t}(d\mathbf{z}), \quad (3.12)$$

где мера μ^{Σ_t} совпадает с мерой из (1.9). Согласно теореме 7.3,

$$\|\mathcal{I}\|_{k, \tilde{K}} \lesssim_{k, K, \tilde{K}} \|w\|_{k, K}, \quad \text{если } \tilde{K} < \frac{K+2-d}{2}, \quad K > d, \quad (3.13)$$

и $k < d/2 - 1$. Обозначим $f^m(y) = \mathcal{I}(m+y)$. Тогда $\|f^m\|_{k, \tilde{K}} \lesssim_{m, \tilde{K}} \|\mathcal{I}\|_{k, \tilde{K}}$, и, согласно (3.13),

$$|f^m|_{L_1} = |\mathcal{I}|_{L_1} \lesssim \|\mathcal{I}\|_{0, 4/3} \lesssim \|w\|_{0, d+1}. \quad (3.14)$$

Для доказательства пункта а) мы применяем следствие 3.7 с $f = f^m$ и $x = q/L$ к первому интегралу в (3.12). Заметим, что $f^m(0) = \mathcal{I}(m) = \sigma_\infty(w; A, m)$. Тогда, используя (3.13) с $\tilde{K} = 0$, $K = d+1$ и $k = M$ вместе с (3.14), мы получаем

$$\tilde{I}_q(0) = \sigma_\infty(w) + O_{M, m, C, \delta} (q^{M-\delta} L^{-M+\delta} \|w\|_{M, d+1}),$$

что эквивалентно (3.10).

Чтобы доказать (3.11), мы применяем лемму 3.6 к интегралу в (3.12) с $m = 0$ и получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}(t)h(x, t) dt &= \mathcal{I}(0) + O_M \left(\beta^{-M-1} x^M \left(\frac{1}{X} \int_{-X}^X |\mathcal{I}^{(M)}(t)| dt \right) \right) \\ &\quad + O_{C,N} ((x^N + \beta^N)(\|\mathcal{I}\|_{M-1,0} + x^{-1}|\mathcal{I}|_{L_1})), \end{aligned}$$

где $x = q/L$ и $X = \min\{1, x/\beta\}$. теорема 7.3 с $k = M$ и $M = d + 1$ влечет

$$\int_{-X}^X |\mathcal{I}^{(M)}(t)| dt \lesssim X \langle \log X \rangle \|w\|_{M,d+1}.$$

Последняя оценка вместе с (3.13) и (3.14) влечет (3.11).

4 Член J_0

В этом параграфе доказывается следующее предложение, где мы анализируем член J_0 , определенный в (1.19).

Предложение 4.1. *Пусть $d \geq 5$. Тогда для произвольной $0 < \gamma_2 < 1$*

$$|J_0 - L^d \sigma_\infty(w) \sigma(A, L^2 m)| \lesssim_{\gamma_2, m} L^{\frac{d}{2}+2+\gamma_2(\frac{d}{2}-1)} \|w\|_{[d/2]-2, d+1}.$$

Доказательство. Запишем J_0 в виде (1.21). Тогда неравенство $|w|_{L_1} \lesssim \|w\|_{0, d+1}$ влечет, что достаточно обосновать приведенные ниже леммы 4.2 и 4.3, в которых мы оцениваем члены J_0^+ и J_0^- . \square

Лемма 4.2. *Пусть $w \in L_1(\mathbb{R}^d)$ и $d \geq 3$. Тогда $|J_0^+| \lesssim L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-1)} |w|_{L_1}$, для любой $\gamma_2 \in (0, 1)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1, $|S_q(0)| \lesssim q^{d/2+1}$, так что

$$|J_0^+| \lesssim \sum_{q > L^{1-\gamma_2}} q^{-d/2+1} I_q(0).$$

Записывая интеграл I_q в виде (3.8), согласно следствию 3.3 находим, что

$$|I_q(0)| \lesssim \frac{L^{d+1}}{q} |w|_{L_1}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} |J_0^+| &\lesssim L^{d+1} |w|_{L_1} \sum_{q > L^{1-\gamma_2}} q^{-d/2} \lesssim L^{d+1} |w|_{L_1} L^{(-d/2+1)(1-\gamma_2)} \\ &= L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-1)} |w|_{L_1}. \end{aligned}$$

\square

Лемма 4.3. Пусть $d \geq 5$. Тогда для любой $\gamma_2 \in (0, 1)$,

$$J_0^- = L^d \sigma_\infty(w) \sigma(A, L^2 m) + O_{\gamma_2, m}(L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-2)} \|w\|_{\lceil d/2 \rceil - 2, d+1}).$$

Доказательство. Подставляя (3.10) с $C = 1$ в определение члена J_0^- , получаем что $J_0^- = I_A + I_B$, где

$$\begin{aligned} I_A &:= L^d \sigma_\infty(w) \sum_{q \leq L^{1-\gamma_2}} q^{-d} S_q(0), \\ |I_B| &\lesssim_{M, \delta, m} L^{d-M+\delta} \|w\|_{M, d+1} \sum_{q \leq L^{1-\gamma_2}} S_q(0) q^{-d+M}, \end{aligned}$$

для $M < d/2 - 1$ и произвольной $\delta > 0$. Лемма 2.3 влечет равенство

$$\sum_{q \leq L^{1-\gamma_2}} q^{-d} S_q(0) = \sigma(A, L^2 m) + O(L^{(-d/2+2)(1-\gamma_2)}),$$

так что

$$I_A = L^d \sigma_\infty(w) \sigma(A, L^2 m) + O(\sigma_\infty(w) L^{d/2+2+\gamma_2(d/2-2)}),$$

в то время как $|\sigma_\infty(w)| = |\mathcal{I}(m)| \leq \|\mathcal{I}\|_{0,0} \leq \|w\|_{0, d+1}$ ввиду (3.13). Касательно I_B , лемма 2.1 влечет неравенство

$$|I_B| \lesssim_{M, \delta, m} L^{d-M+\delta} \|w\|_{M, d+1} \sum_{q \leq L^{1-\gamma_2}} q^{-d/2+1+M}.$$

Выбирая $M = \lceil d/2 \rceil - 2$ и $\delta = \gamma_2/2$, находим

$$|I_B| \lesssim_{\delta, m} \|w\|_{\lceil d/2 \rceil - 2, d+1} L^{d/2+2+\delta} \ln L \lesssim_{\gamma_2, m} \|w\|_{\lceil d/2 \rceil - 2, d+1} L^{d/2+2+\gamma_2}.$$

□

5 Член $J_{\geq}^{\gamma_1}$

В этом параграфе мы оцениваем член $J_{\geq}^{\gamma_1}$, определенный в (1.19). Ключевой момент доказательства состоит в адаптации леммы 19 из [11] для нашего случая. Напомним обозначение (3.8).

Предложение 5.1. Для всех $d \geq 1$, $N > 0$ и $\mathbf{c} \neq 0$ имеем

$$|\tilde{I}_q(\mathbf{c})| \lesssim_{N, m} \frac{L}{q} |\mathbf{c}|^{-N} \|w\|_{N, 2N+d+1}. \quad (5.1)$$

Доказательство. Положим $f_q(\mathbf{z}) := w(\mathbf{z}) h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right)$. Так как

$$\frac{i}{2\pi} \frac{q}{L} |\mathbf{c}|^{-2} (\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{z}}) e_q(-\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}L) = e_q(-\mathbf{z} \cdot \mathbf{c}L),$$

то интегрируя по частям N раз в интеграле (3.9) мы находим

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_q(\mathbf{c}) \right| &\leq \left(\frac{q}{2\pi L} |\mathbf{c}|^{-2} \right)^N \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{z}})^N f_q(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \\ &\lesssim_N \left(\frac{q}{L} \right)^N |\mathbf{c}|^{-N} \sum_{0 \leq n \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} \max_{0 \leq l \leq n/2} \left| \frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}} h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right) \right| \\ &\quad \times |\mathbf{z}|^{n-2l} |\nabla_{\mathbf{z}}^{N-n} w(\mathbf{z})| d\mathbf{z}, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial y} h$ обозначает производную функции h по второму аргументу.

Предположим сперва, что $q \leq L$. Тогда, согласно лемме 3.2 с $N = 0$,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq l \leq n/2} \left| \frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}} h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right) \right| |\mathbf{z}|^{n-2l} |\nabla_{\mathbf{z}}^{N-n} w(\mathbf{z})| &\leq \\ &(L/q)^{n+1} \langle \mathbf{z} \rangle^{-d-1} \|w\|_{N-n, n+d+1}. \end{aligned}$$

Так как $n \leq N$, мы получаем (5.1). Пусть теперь $q > L$. Тогда, согласно пункту 1 леммы 3.1, функция h не зануляется только если

$$2|F^m(\mathbf{z})| > \frac{q}{L}. \quad (5.2)$$

Для таких \mathbf{z} и для $l \leq n$, пункт 3 леммы 3.1 влечет неравенство

$$\left| \frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}} h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right) \right| \lesssim_{n-l} \frac{L}{q} \frac{1}{|F^m(\mathbf{z})|^{n-l}} \lesssim_{n-l} \left(\frac{L}{q}\right)^{n-l+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq l \leq n/2} \left| \frac{\partial^{n-l}}{\partial y^{n-l}} h\left(\frac{q}{L}, F^m(\mathbf{z})\right) \right| |\mathbf{z}|^{n-2l} |\nabla_{\mathbf{z}}^{N-n} w(\mathbf{z})| &\lesssim \\ &\max_{0 \leq l \leq n} \frac{(L/q)^{n-l+1}}{\langle \mathbf{z} \rangle^{2(N-n+l)}} \frac{\|w\|_{N-n, 2N-n+d+1}}{\langle \mathbf{z} \rangle^{d+1}}. \end{aligned}$$

Так как $q/L \lesssim_m \langle \mathbf{z} \rangle^2$ ввиду (5.2), то первая дробь выше ограничена величиной $(L/q)^{N+1}$, и мы снова получаем (5.1). \square

В качестве следствия находим оценку на $J_{>}^{\eta_1}$:

Следствие 5.2. Член $J_{>}^{\gamma_1}$, определенный в (1.19) с $\gamma_1 \in (0, 1)$ и $d \geq 3$, удовлетворяет неравенству

$$|J_{>}^{\gamma_1}| \lesssim_{\gamma_1, m} \|w\|_{N_0, 2N_0+d+1},$$

где $N_0 := \lceil d + (d+1)/\gamma_1 \rceil$.

Доказательство. Обозначая l^1 -норму через $|\cdot|_1$, по определению $J_{>}^{\gamma_1}$ имеем

$$\begin{aligned} |J_{>}^{\gamma_1}| &\lesssim \sum_{s \geq L^{\gamma_1}} s^{d-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} \sup_{|\mathbf{c}|_1=s} |S_q(\mathbf{c})| |I_q(\mathbf{c})| \\ &\lesssim \sum_{s \geq L^{\gamma_1}} s^{d-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-d/2} L^d \sup_{|\mathbf{c}|_1=s} |\tilde{I}_q(\mathbf{c})| \\ &\lesssim_{N, m} \sum_{s \geq L^{\gamma_1}} s^{d-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d/2} s^{-N} L^{d+1} \|w\|_{N, 2N+d+1}, \end{aligned}$$

где второе неравенство следует из леммы 2.1, а третье – из предложения 5.1. Сумма по q ограничена константой. Выбирая $N = N_0$, находим что

$$L^{d+1} \sum_{s \geq L^{\gamma_1}} s^{d-1} s^{-N} \leq L^{d+1} \sum_{s \geq L^{\gamma_1}} s^{-1-(d+1)/\gamma_1} \lesssim 1.$$

Это завершает доказательство. \square

6 Член $J_{<}^{\gamma_1}$

6.1 Оценка

Наша следующая (и последняя) задача состоит в оценке члена $J_{<}^{\gamma_1}$ из (1.18).

Предложение 6.1. Для любых $d \geq 3$ и $\gamma_1 \in (0, 1/2)$,

$$|J_{<}^{\gamma_1}| \lesssim_{\gamma_1, m} L^{d/2+2+\gamma_1(d+1)} (\|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}),$$

где $\bar{N} = \bar{N}(d, \gamma_1) := \lceil d^2/\gamma_1 \rceil - 2d$.

Предложение 6.1 следует из леммы ниже, являющейся модификацией леммы 22 в [11], и доказанной в следующем параграфе.

Лемма 6.2. Для любого $d \geq 3$ и $\mathbf{c} \neq 0$,

$$|I_q(\mathbf{c})| \lesssim_{\gamma_1, m} L^{d/2+1+\gamma_1} (q/|\mathbf{c}|)^{d/2-1-\gamma_1} (\|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}),$$

где \bar{N} и γ_1 те же, что и выше.

Доказательство предложения 6.1. Согласно лемме 2.1,

$$\begin{aligned} |J_{<}^{\gamma_1}| &\lesssim \sum_{\mathbf{c} \neq 0, |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d} q^{d/2+1} |I_q(\mathbf{c})| \lesssim L^{d\gamma_1} \max_{\mathbf{c} \neq 0: |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} |I_q(\mathbf{c})| \sum_{q=1}^{\infty} q^{-d/2+1} \\ &= L^{d\gamma_1} \left(\sum_{q < L} + \sum_{q \geq L} \right) q^{-d/2+1} \max_{\mathbf{c} \neq 0: |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} |I_q(\mathbf{c})| = J_- + J_+, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_- &:= L^{d\gamma_1} \sum_{q < L} q^{-d/2+1} \max_{\mathbf{c} \neq 0: |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} |I_q(\mathbf{c})|, \\ J_+ &:= L^{d\gamma_1} \sum_{q \geq L} q^{-d/2+1} \max_{\mathbf{c} \neq 0: |\mathbf{c}| \leq L^{\gamma_1}} |I_q(\mathbf{c})|. \end{aligned}$$

следствие 3.3 вместе с (3.8), (3.9) влечет

$$|I_q(\mathbf{c})| \lesssim \frac{L^{d+1}}{q} |w|_{L_1}, \quad (6.1)$$

так что

$$J_+ \lesssim L^{d\gamma_1} L^{d+1} |w|_{L_1} \sum_{q \geq L} q^{-d/2} \lesssim L^{d\gamma_1+d/2+2} |w|_{L_1} \lesssim L^{d\gamma_1+d/2+2} \|w\|_{0, d+1}.$$

С другой стороны, так как $|\mathbf{c}| \geq 1$, то из леммы 6.2 находим, что

$$\begin{aligned} J_- &\lesssim_{\gamma_1, m} L^{d\gamma_1} L^{d/2+1+\gamma_1} (\|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}) \sum_{q < L} q^{-\gamma_1} \\ &\leq (\|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}) L^{\gamma_1(d+1)+d/2+2}. \end{aligned}$$

□

6.2 Доказательство леммы 6.2

6.2.1 Применение обратного преобразования Фурье

Заметим, что доказательство нетривиально только при $q \lesssim L|\mathbf{c}|$: действительно, для любой $\alpha > 0$ оценка (6.1) влечет неравенство

$$|I_q(\mathbf{c})| \lesssim_{\alpha} L^d |w|_{L_1} \lesssim_{\alpha} L^d (L|\mathbf{c}|/q)^{-d/2+1+\gamma_1} |w|_{L_1}, \quad \text{если } q \geq \alpha L|\mathbf{c}|,$$

так как $|\mathbf{c}| \geq 1$ и $-d/2 + 1 + \gamma_1 < 0$. Теперь остается снова использовать неравенство $|w|_{L_1} \lesssim \|w\|_{0,d+1}$.

Выберем достаточно малую $\alpha = \alpha(d, \gamma_1, A) \in (0, 1)$ и допустим, что $q < \alpha L|\mathbf{c}|$. Рассмотрим функцию $w_2(x) = 1/(1+x^2)$ и положим

$$\tilde{w}(\mathbf{z}) := \frac{w(\mathbf{z})}{w_2(F^m(\mathbf{z}))} = w(\mathbf{z})(1 + F^m(\mathbf{z})^2). \quad (6.2)$$

Пусть

$$p(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(v)h(q/L, v)e(-tv) dv, \quad e(x) := e_1(x) = e^{2\pi ix}. \quad (6.3)$$

Это преобразование Фурье функции $w_2(\cdot)h(q/L, \cdot)$. Тогда, выражая w_2h через p с помощью обратного преобразования Фурье и записывая $w(\mathbf{z}) = \tilde{w}(\mathbf{z})w_2(F^m(\mathbf{z}))$, получаем

$$w(\mathbf{z})h(q/L, F^m(\mathbf{z})) = \tilde{w}(\mathbf{z}) \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e(tF^m(\mathbf{z})) dt.$$

Подставляя это выражение в (3.9), находим

$$\tilde{I}_q(\mathbf{c}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e(-tm) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{w}(\mathbf{z})e(tF(\mathbf{z}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) dt, \quad \mathbf{u} := \mathbf{c}L/q.$$

Заметим, что

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{c}|L/q > \alpha^{-1} > 1,$$

так как $q < \alpha|\mathbf{c}|L$. Обозначим $W_0(x) = c_0^{-d} \prod_{i=1}^d w_0(x_i)$ (см. (3.1)). Тогда $W_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $W_0 \geq 0$ и

$$\text{supp } W_0 = [-1, 1]^d \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \sqrt{d}\}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} W_0(x) dx = 1. \quad (6.4)$$

Положим $\delta = |\mathbf{u}|^{-1/2} < \sqrt{\alpha}$ и запишем \tilde{w} в виде

$$\tilde{w}(\mathbf{z}) = \delta^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} W_0\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{a}}{\delta}\right) \tilde{w}(\mathbf{z}) d\mathbf{a}.$$

Обозначив $\mathbf{b} := \frac{\mathbf{z} - \mathbf{a}}{\delta}$, мы получаем

$$|\tilde{I}_q(\mathbf{c})| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| |I_{\mathbf{a},t}| dt d\mathbf{a},$$

где, ввиду (6.4),

$$I_{\mathbf{a},t} := \int_{\{|\mathbf{b}|\leq\sqrt{d}\}} W_0(\mathbf{b})\tilde{w}(\mathbf{z}) e(tF(\mathbf{z}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{b}, \quad \mathbf{z} := \mathbf{a} + \delta\mathbf{b}.$$

Рассмотрим показатель экспоненты в интеграле $I_{\mathbf{a},t}$:

$$f(\mathbf{b}) = f_{\mathbf{a},t}(\mathbf{b}) := tF(\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}) - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}).$$

На следующем шаге мы оцениваем интеграл $I_{\mathbf{a},t}$, рассматривая (\mathbf{a}, t) как параметр. Для этого введем еще один параметр R , удовлетворяющий неравенству

$$1 \leq R \leq |\mathbf{u}|^{1/3},$$

чье точное значение будет выбрано позже. Далее мы разделяем два случая:

1. параметр (\mathbf{a}, t) лежит в "хорошей" области S_R , где

$$S_R = \{(\mathbf{a}, t) : |\nabla f(0)| = \delta|tA\mathbf{a} - \mathbf{u}| \geq R\langle t/|\mathbf{u}| \rangle = R\langle \delta^2 t \rangle\};$$

2. параметр (\mathbf{a}, t) лежит в "плохом" множестве $S_R^c = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \setminus S_R$.

6.2.2 Интеграл по области S_R .

Рассмотрим сперва интеграл по множеству S_R :

Лемма 6.3. *Для каждого $d \geq 1$, $N \geq 0$ и $R \geq 2\|A\|\sqrt{d}$,*

$$\int_{S_R} |p(t)| |I_{\mathbf{a},t}| d\mathbf{a} dt \lesssim_{N,m} \frac{L}{q} R^{-N} \|w\|_{N,d+5}. \quad (6.5)$$

Доказательство. Положим $\mathbf{l} := \nabla f(0)/|\nabla f(0)|$ и $\mathcal{L} = \mathbf{l} \cdot \nabla_{\mathbf{b}}$. Тогда для $(\mathbf{a}, t) \in S_R$ и $|\mathbf{b}| \leq \sqrt{d}$ (см. (6.4)),

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}f(\mathbf{b})| &= |\mathcal{L}f(0) + \delta^2 t \nabla f(0) \cdot A\mathbf{b} / |\nabla f(0)|| \geq |\nabla f(0)| - \delta^2 |t| |A\mathbf{b}| \\ &\geq R\langle \delta^2 t \rangle - \delta^2 |t| \|A\| \frac{R}{2\|A\|} \geq \frac{1}{2} R\langle \delta^2 t \rangle \geq R/2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ввиду тождества $(2\pi i \mathcal{L}f(\mathbf{b}))^{-1} \mathcal{L}e(f(\mathbf{b})) = e(f(\mathbf{b}))$, N -кратное интегрирование по частям в интеграле $I_{\mathbf{a},t}$ влечет оценку

$$|I_{\mathbf{a},t}| \lesssim_N \max_{|b_i| \leq 1 \forall i} \max_{0 \leq k \leq N} \left| \mathcal{L}^{N-k} \tilde{w}(\delta\mathbf{b} + \mathbf{a}) \frac{(\mathcal{L}^2 f(\mathbf{b}))^k}{(\mathcal{L}f(\mathbf{b}))^{N+k}} \right|,$$

где мы использовали соотношение $\mathcal{L}^m f(\mathbf{b}) = 0$ при $m \geq 3$. Так как $|\mathcal{L}^2 f(\mathbf{b})| \leq \delta^2 |t| |\mathbf{1} \cdot \mathbf{A}| \leq \delta^2 |t| \|A\|$, то ввиду (6.6) имеем

$$\left| \frac{\mathcal{L}^2 f(\mathbf{b})}{\mathcal{L} f(\mathbf{b})} \right| \leq \frac{\delta^2 |t| \|A\|}{\frac{1}{2} R \langle \delta^2 t \rangle} = \frac{2 \|A\|}{R} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Тогда, используя соотношение $\left| \frac{1}{\mathcal{L} f(\mathbf{b})} \right| \leq \frac{2}{R}$, имеющее место в силу (6.6), находим

$$|I_{\mathbf{a},t}| \lesssim_N R^{-N} \max_{|b_i| \leq 1 \forall i} \max_{0 \leq k \leq N} \left| \mathcal{L}^k \tilde{w}(\delta \mathbf{b} + \mathbf{a}) \right|.$$

Таким образом, обозначая через $\mathbf{1}_{S_R}$ индикаторную функцию множества S_R , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |I_{\mathbf{a},t}| \mathbf{1}_{S_R} d\mathbf{a} &\lesssim_N R^{-N} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \mathbf{a} \rangle^{d+1} \max_{|b_i| \leq 1 \forall i} \max_{0 \leq k \leq N} \left| \mathcal{L}^k \tilde{w}(\delta \mathbf{b} + \mathbf{a}) \right| \right) \frac{d\mathbf{a}}{\langle \mathbf{a} \rangle^{d+1}} \\ &\lesssim_N R^{-N} \|\tilde{w}\|_{N,d+1} \lesssim_{N,m} R^{-N} \|w\|_{N,d+5}, \end{aligned}$$

для каждого t . Поэтому

$$\text{левая часть неравенства (6.5)} \lesssim_{N,m} R^{-N} \|w\|_{N,d+5} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| dt. \quad (6.7)$$

Для завершения доказательства леммы нам остается показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt \lesssim L/q. \quad (6.8)$$

Ввиду леммы 3.2 с $N = 2$,

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial v^k} h(x, v) \right| \lesssim_k x^{-k-1} \min\{1, x^2/v^2\}, \quad k \geq 1,$$

и, согласно следствию 3.3, $|h(x, v)| \lesssim x^{-1}$. Тогда интегрирование по частям в (6.3) показывает, что для любого $M \geq 0$,

$$\begin{aligned} |p(t)| &\lesssim_M |t^{-M}| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |w_2^{(M)}(v)| x^{-1} dv \right. \\ &\quad \left. + \max_{1 \leq k \leq M} \int_{-\infty}^{\infty} |w_2^{(M-k)}(v)| x^{-k-1} \min\left\{1, \frac{x^2}{v^2}\right\} dv \right), \end{aligned}$$

где $x := q/L$. Записывая последний интеграл в виде суммы $\int_{|v| \leq x} + \int_{|v| > x}$, находим, что

$$\int_{|v| \leq x} = x^{-k-1} \int_{|v| \leq x} |w_2^{(M-k)}(v)| dv \lesssim_M x^{-k}$$

и

$$\int_{|v|>x} = x^{-k+1} \int_{|v|>x} \frac{|w_2^{(M-k)}(v)|}{v^2} dv \lesssim_M x^{-k}.$$

Тогда, для любого $M \geq 0$

$$|p(t)| \lesssim_M \left(\frac{q}{L}|t|\right)^{-M}, \quad \text{если } \frac{q}{L} < 1 \quad \text{и} \quad |p(t)| \lesssim_M \left(\frac{q}{L}\right)^{-1} |t|^{-M}, \quad \text{если } \frac{q}{L} \geq 1. \quad (6.9)$$

Выбирая $M = 2$ при $|t| > \langle L/q \rangle$ и $M = 0$ при $|t| \leq \langle L/q \rangle$, получаем (6.8). \square

6.2.3 Интеграл по области S_R^c .

Теперь мы исследуем интеграл по "плохому" множеству S_R^c .

Лемма 6.4. Для любых $d \geq 1$, $1 \leq R \leq |\mathbf{u}|^{1/3}$ и $0 < \beta < 1$,

$$\int_{S_R^c} |p(t)| |I_{\mathbf{a},t}| d\mathbf{a} dt \lesssim_m R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+1+\beta} \|w\|_{0,K(d,\beta)},$$

где $K(d, \beta) = d + \lceil d^2/2\beta \rceil + 4$.

Доказательство. На множестве S_R^c мы используем для интеграла $I_{\mathbf{a},t}$ тривиальную верхнюю оценку

$$|I_{\mathbf{a},t}| \lesssim \max_{|b_i| \leq 1 \forall i} |\tilde{w}(\delta \mathbf{b} + \mathbf{a})| \leq \|\tilde{w}\|_{0,0}. \quad (6.10)$$

Включение $(\mathbf{a}, t) \in S_R^c$ влечет, что интегрирование по $d\mathbf{a}$ при фиксированном t проводится лишь по области, где $|\mathbf{A}\mathbf{a} - t^{-1}\mathbf{u}| \leq (R/\delta|t|)\langle t/|\mathbf{u}| \rangle$, так что

$$\left| \mathbf{a} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}}{t} \right| \leq \|A^{-1}\| \frac{R}{\delta|t|} \langle t/|\mathbf{u}| \rangle. \quad (6.11)$$

Допустим сперва, что $|t| \geq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}$. Так как $|\mathbf{u}| > 1$, то разделяя случаи $|t| \leq |\mathbf{u}|$ и $|t| \geq |\mathbf{u}|$, находим что

$$\frac{R}{\delta|t|} \langle t/|\mathbf{u}| \rangle \leq R |\mathbf{u}|^{-1/2+\beta/d}. \quad (6.12)$$

Ввиду (6.10)-(6.12),

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} |I_{\mathbf{a},t}| \mathbf{1}_{S_R^c}(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} \right| \lesssim R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+\beta} \|\tilde{w}\|_{0,0}.$$

Так как $|F^m(\mathbf{z})| \lesssim_m \langle \mathbf{z} \rangle^2$, то по определению (6.2) функции \tilde{w} имеем $\|\tilde{w}\|_{0,0} \lesssim_m \|w\|_{0,4}$. Тогда правая часть приведенного выше неравенства $\lesssim_m R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+\beta} \|w\|_{0,4}$. Учитывая что, согласно (6.8), $\int_{|t| \geq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}} |p(t)| dt \lesssim \frac{L}{q} \leq |\mathbf{u}|$, мы получаем

$$\int_{|t| \geq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p(t)| |I_{\mathbf{a},t}| \mathbf{1}_{S_R^c}(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} \right) dt \lesssim_m R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+1+\beta} \|w\|_{0,4}. \quad (6.13)$$

Пусть теперь $|t| \leq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}$. Тогда правая часть (6.11) ограничена величиной $\|A^{-1}\|R/(\delta|t|)$, так что $|\mathbf{a}| \gtrsim |A^{-1}\mathbf{u}|/|t| - \|A^{-1}\|R/(\delta|t|)$. Ввиду соотношений $|A^{-1}\mathbf{u}| \geq C_A |\mathbf{u}|$ и $R \leq |\mathbf{u}|^{1/3}$, находим

$$|\mathbf{a}| \gtrsim_A \frac{|\mathbf{u}| - RC'_A \sqrt{|\mathbf{u}|}}{|t|} \geq (1 - C'_A |\mathbf{u}|^{-1/6}) \frac{|\mathbf{u}|}{|t|} \geq \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{u}|}{|t|} \geq \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^{\beta/d},$$

где $C'_A = C_A^{-1} \|A^{-1}\|$, так как $|\mathbf{u}|^{-1} \leq \alpha$ если α настолько мало, что $1 - C'_A \alpha^{1/6} \geq 1/2$. Тогда $1 \lesssim |\mathbf{a}|/|\mathbf{u}|^{\beta/d}$ на S_R^c , так что $\mathbf{1}_{S_R^c}(\mathbf{a}, t) \lesssim |\mathbf{u}|^{-d/2+\beta/d} |\mathbf{a}|^{d^2/2\beta-1}$, и мы получаем из (6.10), что для таких t

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |I_{\mathbf{a},t}| \mathbf{1}_{S_R^c}(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} \right| &\lesssim |\mathbf{u}|^{-d/2+\beta/d} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{a}|^{d^2/2\beta-1} \max_{|b_i| \leq 1 \forall i} |\tilde{w}(\delta \mathbf{b} + \mathbf{a})| d\mathbf{a} \\ &\lesssim_m |\mathbf{u}|^{-d/2+\beta/d} \|w\|_{0,K(d,\beta)}, \end{aligned}$$

где $K(d, \beta) = d + \lceil d^2/2\beta \rceil + 4$. С другой стороны, согласно (6.9) с $M = 0$, $\int_{|t| \leq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}} |p(t)| dt \lesssim |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}$, откуда имеем

$$\int_{|t| \leq |\mathbf{u}|^{1-\beta/d}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |p(t)| |I_{\mathbf{a},t}| \mathbf{1}_{S_R^c}(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} \right) dt \lesssim_m |\mathbf{u}|^{-d/2+1} \|w\|_{0,K(d,\beta)}. \quad (6.14)$$

Собирая вместе оценки (6.13) и (6.14) получаем искомое утверждение. \square

6.2.4 Окончание доказательства

Чтобы завершить доказательство леммы 6.2, мы объединяем леммы 6.3 и 6.4, и находим что

$$|\tilde{I}_q(\mathbf{c})| \lesssim_{N,m} \left(\frac{L}{q} R^{-N} + R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+1+\beta} \right) (\|w\|_{N,d+5} + \|w\|_{0,K(d,\beta)}).$$

Зафиксируем $\gamma_1 \in (0, 1/2)$, $\beta = \gamma_1/2$, $R = |\mathbf{u}|^{\frac{\gamma_1}{2d}} \leq |\mathbf{u}|^{\frac{1}{3}}$ и выберем $N = \lceil \frac{d^2}{\gamma_1} \rceil - 2d > 0$ (заметим, что $R \geq \alpha^{-\gamma_1/2d} \geq 2\|A\|\sqrt{d}$, если α настолько мало, что утверждение леммы 6.3 выполняется). Тогда $K(d, \beta) = N + 3d + 4$, $R^{-N} \leq |\mathbf{u}|^{-d/2+\gamma_1} \leq |\mathbf{c}|(L|\mathbf{c}|/q)^{-d/2+\gamma_1}$, так как $|\mathbf{c}| \geq 1$. Более того, $R^d |\mathbf{u}|^{-d/2+1+\beta} = |\mathbf{u}|^{-d/2+1+\gamma_1} = (L|\mathbf{c}|/q)^{-d/2+1+\gamma_1}$. Доказательство окончено. \square

7 Интегралы по квадрикам

Наша цель в этом разделе – изучить интегралы $\mathcal{I}(t; w)$ по квадрикам Σ_t . Мы начнем со случая квадратичных форм F , записанных в удобной нормальной форме (теорема 7.1), и покажем позже в разделе 7.4 (Теорема 7.3) как свести общие интегралы $\mathcal{I}(t; w)$ к интегралам, соответствующим таким квадратичным формам. В этом разделе мы предполагаем, что

$$d \geq 3$$

и не применяем жирный шрифт для обозначения векторов, поскольку большинство переменных, которые мы здесь используем, являются векторами.

7.1 Квадратичные формы в нормальной форме

На $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_u^n \times \mathbb{R}_x^{d_1} \times \mathbb{R}_y^{d_1} = \{z = (u, x, y)\}$, где $d \geq 3$, $n \geq 0$ и $d_1 \geq 1$, рассмотрим квадратичную форму

$$F(z) = \frac{1}{2}|u|^2 + x \cdot y = \frac{1}{2}Az \cdot z, \quad A(u, x, y) = (u, y, x). \quad (7.1)$$

Заметим, что A – ортогональный оператор, $|Az| = |z|$. Как в разделе 1.1 мы рассматриваем квадрики $\Sigma_t = \{z : F(z) = t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что при $t \neq 0$ Σ_t является гладкой гиперповерхностью, а Σ_0 – это конус с особенностью в нуле. Обозначим элемент объема на Σ_t (на $\Sigma_0 \setminus \{0\}$, если $t = 0$), индуцированный из \mathbb{R}^d , как $dz|_{\Sigma_t}$ и положим

$$\mu^{\Sigma_t}(dz) = |Az|^{-1} dz|_{\Sigma_t} \quad (7.2)$$

(см. ниже касательно этой меры при $t = 0$).

Для $k_* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и функции f на \mathbb{R}^d , удовлетворяющей

$$f \in \mathcal{C}^{k_*, M}(\mathbb{R}^d), \quad M > d, \quad (7.3)$$

мы будем изучать интегралы

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(t; f) = \int_{\Sigma_t} f(z) \mu^{\Sigma_t}(dz). \quad (7.4)$$

Наша первая цель – продемонстрировать следующий результат:

Теорема 7.1. *Для квадратичной формы $F(z)$ из (7.1) и функции $f \in \mathcal{C}^{k_*, M}(\mathbb{R}^d)$, $M > d$, рассмотрим интеграл $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(t; f)$, определенный в (7.4). Тогда функция $\mathcal{I}(t)$ является C^k -гладкой если $k < d/2 - 1$, $k \leq k_*$, и является C^{k_* -гладкой вне нуля, если $k \leq \min(d/2 - 1, k_*)$. Для $0 < |t| \leq 1$ имеем*

$$\begin{aligned} \left| \partial^k \mathcal{I}(t) \right| &\lesssim_{k, M} \|f\|_{k, M} \quad \text{если } k < d/2 - 1, \\ \left| \partial^k \mathcal{I}(t) \right| &\lesssim_{k, M} \|f\|_{k, M} (1 - \ln |t|) \quad \text{если } k \leq d/2 - 1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В то время как для $|t| \geq 1$, обозначая $\kappa = \frac{M+2-d}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \partial^k \mathcal{I}(t) \right| &\lesssim_{k, M} \|f\|_{k, M} \langle t \rangle^{-\kappa} \quad \text{если } 1 \leq k \leq d/2 - 1, k \leq k_*, \\ |\mathcal{I}(t)| &\lesssim_{M, \kappa'} \|f\|_{0, M} \langle t \rangle^{-\kappa'} \quad \forall \kappa' < \kappa. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Пример, см. [8, Example A.3], показывает, что в общем случае логарифмический множитель нельзя удалить из правой части (7.5).

Теорема доказывается ниже в несколько шагов. При ее доказательстве для заданного вектора $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ мы рассматриваем его ортогональное дополнение в \mathbb{R}^{d_1} – гиперпространство x^\perp . Мы обозначаем его элементы \bar{x} и снабжаем x^\perp мерой Лебега $d\bar{x}$. Если $d_1 = 1$, то x^\perp вырождается в пространство $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, а $d\bar{x}$ – в δ -меру в точке 0. Практически это означает, что при $d_1 = 1$ пространства x^\perp и y^\perp (и интегралы по ним) исчезают из наших построений. Это упрощает случай $d_1 = 1$, но делает его отличным от $d_1 \geq 2$. Например, в формуле (7.8) при $d_1 = 1$ аффинное пространство $\sigma_t^x(u', x')$ становится точкой $(u', x', (t - \frac{1}{2}|u'|^2)|x'|^{-2}x')$, мера $d\mu^{\Sigma_t}|_{\Sigma_t^x}$ в (7.13) становится $du|x|^{-1}dx$ и т. д. Соответственно ниже мы приводим доказательство только для $d_1 \geq 2$, оставляя случай $d_1 = 1$ простым упражнением для читателя.

7.2 Дезинтеграция двух мер

Наша цель в этом подразделе – найти удобную дезинтеграцию мер $dz|_{\Sigma_t}$ и μ^{Σ_t} , следуя доказательству теоремы 3.6 в [6].

Напомним, что мы записываем элементы $z \in \mathbb{R}^d$ как $z = (u, x, y)$, где $u \in \mathbb{R}^d$ и $x, y \in \mathbb{R}^{d_1}$. Обозначим $\Sigma_t^x = \{(u, x, y) \in \Sigma_t : x \neq 0\}$ (если $t < 0$, то $\Sigma_t^x = \Sigma_t$). Тогда для любого t Σ_t^x есть гладкая гиперповерхность в \mathbb{R}^d , и отображение

$$\Pi_t^x : \Sigma_t^x \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\}, \quad (u, x, y) \mapsto (u, x), \quad (7.7)$$

является гладким аффинным евклидовым расслоением. Его слои суть

$$\sigma_t^x(u', x') := (\Pi_t^x)^{-1}(u', x') = \left(u', x', x'^{\perp} + \frac{t - \frac{1}{2}|u'|^2}{|x'|^2} x' \right), \quad (7.8)$$

где x'^{\perp} – ортогональное дополнение к x' в \mathbb{R}^{d_1} . Для любого $x' \neq 0$ обозначим

$$U_{x'} = \{x : |x - x'| \leq \frac{1}{2}|x'|\}, \quad U = \mathbb{R}^n \times U_{x'} \times \mathbb{R}^{d_1}.$$

Теперь мы построим тривиализацию расслоения Π_t^x над U . Для этого зафиксируем в \mathbb{R}^{d_1} произвольный ортонормированный репер (e_1, \dots, e_{d_1}) такой, что луч $\mathbb{R}_+ e_1$ пересекает область $U_{x'}$. Тогда

$$x_1 > 0 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_{d_1}) =: (x_1, \bar{x}) \in U_{x'}.$$

Мы хотим построить аффинный по третьему аргументу диффеоморфизм

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \times U_{x'} \times \mathbb{R}^{d_1-1} \rightarrow U \cap \Sigma_t$$

вида

$$\Phi_t(u, x, \bar{\eta}) = (u, x, \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta})), \quad \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta}) = (\varphi_t(u, x, \bar{\eta}), \bar{\eta}) \in \mathbb{R}^{d_1}, \quad \bar{\eta} \in \mathbb{R}^{d_1-1}. \quad (7.9)$$

Легко видеть, что $\Phi_t(u, x, \bar{\eta}) \in \Sigma_t$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_t(u, x, \bar{\eta}) = \frac{t - \frac{1}{2}|u|^2 - \bar{x} \cdot \bar{\eta}}{x_1}. \quad (7.10)$$

Отображение $\bar{\eta} \rightarrow \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta})$ с этой функцией φ_t аффинно, и его область значений Φ_t равна $U \cap \Sigma_t$. В координатах $(u, x, \eta_1, \bar{\eta}) \in \mathbb{R}^n \times U_{x'} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_1-1}$ на области $U \subset \mathbb{R}^d$ гиперповерхность Σ_t^x вложена в \mathbb{R}^d как график функции $(u, x, \bar{\eta}) \mapsto \eta_1 = \varphi_t$. Соответственно, в координатах $(u, x, \bar{\eta})$ на $U \cap \Sigma_t$ элемент объема на Σ_t имеет вид $\bar{\rho}_t(u, x, \bar{\eta}) du dx d\bar{\eta}$, где

$$\bar{\rho}_t = (1 + |\nabla \varphi_t|^2)^{1/2} = \left(1 + \frac{|u|^2 + |\bar{\eta}|^2 + |\bar{x}|^2 + x_1^{-2}(t - \frac{1}{2}|u|^2 - \bar{x} \cdot \bar{\eta})^2}{x_1^2} \right)^{1/2}.$$

Переходя от переменной $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{d_1-1}$ к $y = \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta}) \in \sigma_t^x(u, x)$ мы заменяем $d\bar{\eta}$ на $|\det \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta})| d_{\sigma_t^x(u,x)} y$. Здесь $d_{\sigma_t^x(u,x)} y$ – мера Лебега на $(d_1 - 1)$ -мерном аффинном евклидовом пространстве $\sigma_t^x(u, x)$, и через $\det \Phi_t^{u,x}$ обозначен определитель линейного отображения $\Phi_t^{u,x}$, рассматриваемого как линейный изоморфизм евклидова пространства $\mathbb{R}^{d_1-1} = \{\bar{\eta}\}$ и касательного пространства к $\sigma_t^x(u, x)$, отождествленного с евклидовым пространством $x^\perp \subset \mathbb{R}^{d_1}$. Соответственно элемент объема на $\Sigma_t \cap U$ можно записать как $\rho_t(u, x, y) du dx d_{\sigma_t^x(u,x)} y$, где

$$\rho_t(u, x, y) = \bar{\rho}_t(u, x, \bar{\eta}) |\det \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta})| \quad (u, x, y) \in \Sigma_t, \text{ и } \Phi_t^{u,x}(\bar{\eta}) = y.$$

Теперь считаем плотность ρ_t . Возьмем любую точку $z_* = (u_*, x_*, y_*) \in U \cap \Sigma_t$ и выберем ортобазис (e_1, \dots, e_{d_1}) такой что $e_1 = x_*/|x_*|$. Тогда

$$x_* = (|x_*|, 0), \quad y_* = (y_{*1}, \bar{y}_*), \quad y_{*1} = \left(\frac{t - \frac{1}{2}|u_*|^2}{|x_*|} \right), \quad \bar{y}_* \in \mathbb{R}^{d_1-1}.$$

Итак (см. (7.9)–(7.10)) отображение Φ_t таково, что $\Phi_t^{u_*, x_*}(\bar{\eta}) = (y_{*1}, \bar{\eta}) = \tilde{y} \in \sigma_t^x(u_*, x_*)$ (т. е. $\varphi_t(z_*) = y_{*1}$). В этих координатах $\rho_t(u_*, x_*, y_{*1}, \bar{y}_*) = \bar{\rho}_t(u_*, x_*, \bar{y}_*)$, что равно

$$(1 + |x_*|^{-2} (|u_*|^2 + |\bar{y}_*|^2 + |y_{*1}|^2))^{1/2} = \frac{(|x_*|^2 + |u_*|^2 + |\bar{y}_*|^2 + |y_{*1}|^2)^{1/2}}{|x_*|}.$$

То есть $\rho_t(z_*) = \frac{|z_*|}{|x_*|}$. Так как z_* – это любая точка в $U \cap \Sigma_t$, то мы доказали

Предложение 7.2. *Элемент объема $dz|_{\Sigma_t^x}$ относительно проекции Π_t^x дезинтегрируется следующим образом:*

$$dz|_{\Sigma_t^x} = du |x|^{-1} dx |z| d_{\sigma_t^x(u,x)} y. \quad (7.11)$$

То есть для любой функции $f \in C_0^0(\Sigma_t^x)$

$$\int f(z) dz|_{\Sigma_t^x} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} |x|^{-1} \left(\int_{\sigma_t^x(u,x)} |z| f(z) d_{\sigma_t^x(u,x)} y \right) dx du.$$

Точно так же, если мы положим $\Sigma_t^y = \{(u, x, y) \in \Sigma_t : y \neq 0\}$ и рассмотрим проекцию

$$\Pi_t^y : \Sigma_t^y \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1} \setminus \{0\}, \quad (u, x, y) \mapsto (u, y),$$

то

$$dz|_{\Sigma_t^y} = du|y|^{-1}dy|z|d_{\sigma_t^y(u,y)}x. \quad (7.12)$$

Обозначим $\Sigma_t^0 = \{(u, x, y) \in \Sigma_t : x = y = 0\}$. Тогда $\Sigma_t \setminus \Sigma_t^0$ – гладкое многообразие и $dz|_{\Sigma_t}$ определяет на нем гладкую меру.

В силу соотношений (7.11) и (7.12) функция $|z|^{-1}$ локально интегрируема на Σ_t относительно меры $dz|_{\Sigma_t}$. Таким образом, μ^{Σ_t} (см. (7.2)) является корректно определенной борелевской мерой на Σ_t . Так как $|Az| = |z|$, то ввиду (7.11) и (7.12),

$$d\mu^{\Sigma_t}|_{\Sigma_t^x} = du|x|^{-1}dx d_{\sigma_t^x(u,x)}y, \quad d\mu^{\Sigma_t}|_{\Sigma_t^y} = du|y|^{-1}dy d_{\sigma_t^y(u,y)}x. \quad (7.13)$$

Мера μ^{Σ_t} определяет на \mathbb{R}^d борелевскую меру с носителем в Σ_t . Она также будет обозначаться μ^{Σ_t} .

7.3 Анализ интеграла $\mathcal{I}(t; f)$

Заметим, что для любого t отображение

$$L_t : \Sigma_0^x \rightarrow \Sigma_t^x, \quad (u, x, y) \mapsto (u, x, y + t|x|^{-2}x)$$

определяет аффинный изоморфизм расслоений $\Pi_0|_{\Sigma_0^x}$ и $\Pi_t|_{\Sigma_t^x}$. Поскольку L_t сохраняет меру Лебега на слоях, то в силу (7.11) оно преобразует меру μ^{Σ_0} в μ^{Σ_t} . Используя (7.13) мы получаем, что для любого t интеграл $\mathcal{I}(t)$, определенный в (7.4), может быть записан как

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t; f) &= \int_{\Sigma_0} f(L_t(z))\mu^{\Sigma_0}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d_1}} |x|^{-1} \left(\int_{\sigma(u,x)} f(u, x, y + t|x|^{-2}x) d_{\sigma^x(u,x)}y \right) du dx. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здесь $\sigma(u, x) := \sigma_0^x(u, x) = x^\perp - \frac{1}{2}|u|^2|x|^{-2}x$.

Напомним, что $f(u, x, y)$ удовлетворяет (7.3). Взяв любую гладкую функцию $\varphi(t) \geq 0$ на \mathbb{R} , обращающуюся в нуль при $|t| \geq 2$ и равную единице при $|t| \leq 1$ мы запишем f как $f = f_{00} + f_1$, где $f_{00} = \varphi(|(x, y)|^2)f$ и $f_1 = (1 - \varphi(|(x, y)|^2))f$. Обозначая $B_r(\mathbb{R}^m) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi| \leq r\}$ и $B^r(\mathbb{R}^m) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi| \geq r\}$ мы видим, что

$$\text{supp } f_{00} \subset \mathbb{R}^n \times B_{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{2d_1}), \quad \text{supp } f_1 \subset \mathbb{R}^n \times B^1(\mathbb{R}^{2d_1}). \quad (7.15)$$

Полагая $f_{11}(z) = f_1(z)(1 - \varphi(4|x|^2))$, $f_{10}(z) = f_1(z)\varphi(4|x|^2)$ мы записываем f как

$$f = f_{00} + f_{11} + f_{10}.$$

Поскольку $(x, y) \in B^1(\mathbb{R}^{2d_1})$ влечет, что $|x| \geq 1/\sqrt{2}$ или $|y| \geq 1/\sqrt{2}$, то с учетом (7.15),

$$\begin{aligned} \text{supp } f_{11} &\subset \mathbb{R}^n \times B^{1/2}(\mathbb{R}_x^{d_1}) \times \mathbb{R}_y^{d_1}, \\ \text{supp } f_{10} &\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_x^{d_1} \times B^{1/\sqrt{2}}(\mathbb{R}_y^{d_1}). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Очевидно, что при $i, j = 0, 1$, $\|f_{ij}\|_{k,m} \leq C_{k,m} \|f\|_{k,m}$ для всех $k \leq k_*$ и $m \leq M$.

Полагая $\mathcal{I}_{ij}(t) = \mathcal{I}(t; f_{ij})$, имеем:

$$\mathcal{I}(t; f) = \mathcal{I}_{00}(t) + \mathcal{I}_{10}(t) + \mathcal{I}_{11}(t).$$

7.3.1 Интеграл $\mathcal{I}_{00}(t)$.

В виду (7.14) $\mathcal{I}_{00}(t)$ является непрерывной функцией, и для $1 \leq k \leq k_*$

$$\begin{aligned} \partial^k \mathcal{I}_{00}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B_{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{d_1})} |x|^{-1} dx \right) du \\ &\quad \int_{y \in \sigma(u,x)} (d^k / dt^k) f_{00}(u, x, y + t|x|^{-2}x) d_{\sigma(u,x)} y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{d_1})} |x|^{-1} \left(\int_{y \in \sigma(u,x)} d_y^k f_{00}(u, x, y + t|x|^{-2}x) [|x|^{-2}x] d_{\sigma(u,x)} y \right) dx du, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где через $d_y^k f_{00} [|x|^{-2}x]$ обозначено применение дифференциала $d_y^k f_{00}$ к совокупности k векторов, каждый из которых равен $|x|^{-2}x$. Полагая $\tau = t - \frac{1}{2}|u|^2$, для $y \in \sigma(u, x)$ имеем

$$y + t|x|^{-2}x = \bar{y} + \tau|x|^{-2}x, \quad \text{для некоторого } \bar{y} \in x^\perp. \quad (7.18)$$

Таким образом интеграл по y в (7.17) можно записать как как

$$\int_{x^\perp} d_y^k f_{00}(u, x, \bar{y} + \tau|x|^{-2}x) [|x|^{-2}x] d\bar{y}. \quad (7.19)$$

Поскольку $|\bar{y} + \tau x|x|^{-2}|^2 = |\bar{y}|^2 + \tau^2|x|^{-2}$, то на носителе подынтегральной функции имеем

$$|x| \leq \sqrt{2}, \quad |\bar{y}|^2 + \tau^2|x|^{-2} \leq 2. \quad (7.20)$$

В частности,

$$|\tau| = \left| t - \frac{1}{2}|u|^2 \right| \leq \sqrt{2}|x| \leq 2 \quad \text{в (7.19)}. \quad (7.21)$$

В виду (7.15) диаметр области интегрирования в (7.19) ограничен $\sqrt{2}$. Таким образом, для любого $m \geq 0$ интеграл (7.19) не превосходит величины $C_{k,m}|x|^{-k}\langle u \rangle^{-m}\|f\|_{k,m}$. Обозначая $R = |u|$, $r = |x|$, получаем, что

$$|\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)| \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} \int_0^{\sqrt{2}} r^{d_1-k-2} \left(\int_0^\infty R^{n-1} \langle R \rangle^{-M} \chi_{|\tau| \leq \sqrt{2}r} dR \right) dr. \quad (7.22)$$

Если $n = 0$, то интеграл по dR следует убрать из правой части. Ниже мы оценим $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ отдельно для случаев $n = 0$ и $n \geq 1$.

а) Если $n = 0$, то $\tau = t$ и из (7.21) получаем, что $|x| \geq t/\sqrt{2}$, в то время как из (7.15) видим, что при $t \neq 0$ функция $\mathcal{I}_{00}(t)$ является C^{k^*} -гладкой (поскольку $f \in C^{k^*}$). Затем из (7.22) мы находим

$$|\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)| \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} \int_{|t|/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r^{d_1-k-2} \chi_{|t| \leq 2} dr. \quad (7.23)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)| &\lesssim_k \|f\|_{k,M} \quad \text{если } k \leq \min(d_1 - 2, k_*), \\ |\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)| &\lesssim_k \|f\|_{k,M} (1 + |\ln |t||) \quad \text{если } k \leq \min(d_1 - 1, k_*), \end{aligned} \quad (7.24)$$

в то время как $\mathcal{I}_{00}(t) = 0$ для $|t| \geq 2$.

б) Если $n \geq 1$, то для оценки $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ разобьем интеграл для $\mathcal{I}_{00}(t)$ на сумму двух. А именно, для фиксированного $t \neq 0$ запишем f_{00} как $f_{00} = f_{00<} + f_{00>}$, где $f_{00<} = f_{00}\varphi(8|x|^2/t^2)$ и φ – это функция, используемая для определения функций f_{ij} , $0 \leq i, j \leq 1$. Значит,

$$\text{supp } f_{00<} \subset \{2|x| \leq |t|\}, \quad \text{supp } f_{00>} \subset \{2\sqrt{2}|x| \geq |t|\}. \quad (7.25)$$

С использованием очевидных обозначений мы имеем $\mathcal{I}_{00}(t) = \mathcal{I}_{00<}(t) + \mathcal{I}_{00>}(t)$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{00<}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap B_{|t|/2}(\mathbb{R}^{d_1})} |x|^{-1} \\ &\quad \left(\int_{\substack{y \in \sigma(u,x) \\ |x|^2 + |y+t|x|^{-2}x|^2 \leq 2}} f_{00<}(u, x, y + t|x|^{-2}x) d_{\sigma(u,x)} y \right) dx du, \\ \mathcal{I}_{00>}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap B_{|t|/2\sqrt{2}}(\mathbb{R}^{d_1})} |x|^{-1} \\ &\quad \left(\int_{\substack{y \in \sigma(u,x) \\ |x|^2 + |y+t|x|^{-2}x|^2 \leq 2}} f_{00>}(u, x, y + t|x|^{-2}x) d_{\sigma(u,x)} y \right) dx du. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую функцию $\mathcal{I}_{00<}(t)$. Заметим, что по (7.18) для $y \in \sigma(u, x)$ и $|x| \leq |t|/2$ (ср. (7.25))

$$|y + t|x|^{-2}x| \geq |\tau||x|^{-1} = \left| t - \frac{1}{2}|u|^2 \right| |x|^{-1} \geq -t|x|^{-1} > \sqrt{2}, \quad \text{для } t < 0,$$

так что $\mathcal{I}_{00<}(t) = 0$ для $t < 0$. При $t > 0$, выполняя замену переменных $\sqrt{t}u' = u$, $tx' = x$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{00<}(t) &= t^{d/2-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_{\sqrt{2}/t}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap B_{1/2}(\mathbb{R}^{d_1})} |x'|^{-1} \varphi(8|x'|^2) \\ &\quad \left(\int_{\substack{y \in \sigma(u', x') \\ |x'|^2 t^2 + |y + |x'|^{-2} x'|^2 \leq 2}} f_{00}(\sqrt{t}u', tx', y + |x'|^{-2}x') d_{\sigma(u', x')} y \right) dx' du', \end{aligned}$$

где использовано, что $\sigma(u', x') = \sigma(u, x)$. Дифференцируя по t мы находим по индукции по k , что для любых l и k

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} t^l g(\sqrt{t}u', tx') &= \sum_{l_1+l_2+l_3=k} c_{l_1, l_2, l_3} t^{l-l_1-l_2/2} \left(u'^{l_2} \cdot \nabla_u \right)^{l_2} \\ &\quad \left(x'^{l_3} \cdot \nabla_x \right)^{l_3} g(\sqrt{t}u', tx'), \end{aligned}$$

для любой достаточно регулярной функции g и подходящих констант c_{l_1, l_2, l_3} . Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \partial^k \mathcal{I}_{00<}(t) \right| &\lesssim_{k, M} \max_{l_1+l_2+l_3=k} t^{d/2-1-l_1-l_2/2} \|f\|_{k, M} \int_{\mathbb{R}^n} |u'|^{l_2} \langle u' \sqrt{t} \rangle^{-M} \\ &\quad \int_{B_{\sqrt{2}/t}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap B_{1/2}(\mathbb{R}^{d_1})} |x'|^{l_3-1} \left(\int_{\substack{y \in \sigma(u', x') \\ |x'|^2 t^2 + |y + |x'|^{-2} x'|^2 \leq 2}} d_{\sigma(u', x')} y \right) dx' du'. \end{aligned}$$

Обозначая точки пространства x^\perp через \bar{y} , видим, что интеграл по $d_{\sigma(u', x')} y$ не превосходит

$$\int_{\substack{\bar{y} \in x^\perp \\ |x'|^2 t^2 + |\bar{y} + \tau' |x'|^{-2} x'|^2 \leq 2}} 1 d\bar{y}, \quad \tau' = 1 - \frac{1}{2}|u'|^2. \quad (7.26)$$

В виду (7.21), на носителе подынтегральной функции $|\tau'| \leq \sqrt{2}|x'|$. Так что там

$$1 - \sqrt{2}|x'| \leq \frac{|u'|^2}{2} \leq 1 + \sqrt{2}|x'|. \quad (7.27)$$

Так как область интегрирования в \bar{y} ограничена, то интеграл (7.26) ограничен константой. Так что обозначив $|x'| = r'$, $|u'| = R'$ и используя (7.27), мы имеем

$$\left| \partial^k \mathcal{I}_{00<}(t) \right| \lesssim_{k,M} \max_{l_1+l_2+l_3=k} \|f\|_{k,M} t^{d/2-l_1-l_2/2-1} \int_0^{1/2} r'^{d_1-2+l_3} \left(\int_{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2}r'}}^{\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}r'}} R'^{n-1+l_2} \langle R'^2 t \rangle^{-M/2} dR' \right) dr'.$$

Так как $r' \leq 1/2$, то на области интегрирования $\sqrt{2-\sqrt{2}} \leq R' \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}r'} - \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2}r'} \lesssim r'$. Таким образом, интеграл по dR' ограничен $C\langle t \rangle^{-M/2}$. Поэтому

$$\left| \partial^k \mathcal{I}_{00<}(t) \right| \lesssim_{k,M} \max_{l_1+l_2+l_3=k} \|f\|_{k,M} t^{d/2-l_1-l_2/2-1} \langle t \rangle^{-M/2} \int_0^{1/2} r'^{d_1-1+l_3} dr'.$$

Отсюда следует, что при $0 < t \leq 4$ для любого $k \leq k_*$ и любого $d_1 \geq 1$,

$$\left| \partial^k \mathcal{I}_{00<}(t) \right| \lesssim_k \|f\|_{k,0} t^{d/2-k-1}. \quad (7.28)$$

В то время как для произвольных $t \geq 4$ и $k \leq k_*$,

$$\begin{aligned} \left| \partial^k \mathcal{I}_{00<}(t) \right| &\lesssim_{k,M} \max_{l_1+l_2+l_3=k} \|f\|_{k,M} t^{d/2-M/2-l_1-l_2/2-1} \\ &\times \int_0^{\sqrt{2}/t} r'^{d_1-1+l_3} dr' \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} t^{-(M+2+k+2d_1-d)/2}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Напомним, что $\mathcal{I}_{00<}(t)$ обращается в нуль при $t < 0$.

Для $\mathcal{I}_{00>}(t)$ сначала заметим, что по (7.20) и (7.25) функция $\mathcal{I}_{00>}(t)$ обращается в нуль, если $|t| > 4$. Далее, используя индукцию по k , замечаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} g(tx|x|^{-2})(1 - \varphi(8|x|^2/t^2)) &= \sum_{l_1+l_2+l_3=k} c_{l_1,l_2,l_3} |x|^{2(l_2-l_1)} t^{-3l_2-l_3} \\ &\times \left((x \cdot \nabla)^{l_1} g \right) \frac{d^{l_2}}{dy^{l_2}} (1 - \varphi), \end{aligned} \quad (7.30)$$

где $c_{l_1,l_2,l_3} = 0$, если $l_3 > 0$ и $l_2 = 0$. Так как $\varphi' \neq 0$ только для $|t|/2\sqrt{2} \leq |x| \leq |t|/2$, то

$$\frac{d^{l_2}}{dy^{l_2}} (1 - \varphi) t^{-3l_2-l_3} \lesssim_{l_2,l_3} |x|^{-3l_2-l_3}, \quad l_2 > 0,$$

так что

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} g(tx|x|^{-2})(1 - \varphi(8|x|^2/t^2)) \right| \lesssim_k |x|^{-k} \|g\|_{k,0}.$$

Отсюда, аналогично (7.22) и снова обозначая $|x| = r$ и $|u| = R$, мы получаем, что

$$|\partial^k \mathcal{I}_{00>}(t)| \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} \int_{|t|/2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r^{d_1-k-2} \left(\int_0^\infty R^{n-1} \langle R \rangle^{-M} \chi_{|\tau| \leq \sqrt{2}r} dR \right) dr$$

(здесь и далее $\int_a^b dr = 0$, если $b \leq a$). Так как в области интегрирования в виду соотношений (7.25) и множителя $\chi_{|\tau| \leq \sqrt{2}r}$ имеем $R^2 \leq 6\sqrt{2}r$, то

$$\begin{aligned} |\partial^k \mathcal{I}_{00>}(t)| &\lesssim_{k,M,n} \|f\|_{k,M} \int_{|t|/2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r^{d/2-k-2} dr \\ &\lesssim_{k,M} \begin{cases} \|f\|_{k,M}, & k < d/2 - 1, \\ \|f\|_{k,M}(1 + |\ln |t||), & k \leq d/2 - 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Если $k < d/2 - 1$, то по предыдущему $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ ограничено для всех t . В этом случае, модифицируя интегранд в (7.17) множителем $\chi_{|x| \geq \varepsilon}$, мы видим, что полученные таким образом функции $\mathcal{I}_{00>}^\varepsilon, \mathcal{I}_{00<}^\varepsilon$ удовлетворяют тем же оценкам что и функции $\mathcal{I}_{00>}, \mathcal{I}_{00<}$ выше. Поэтому функция $\mathcal{I}_{00}^\varepsilon$ также удовлетворяет им. Функции $\partial^k \mathcal{I}_{00}^\varepsilon(t)$ с $\varepsilon > 0$ очевидно, непрерывны по t и сходятся к $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ равномерно на ограниченных интервалах. Отсюда последняя функция также непрерывна. Подобным образом функция $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ с $k = d/2 - 1$ непрерывна на любом множестве $|t| \geq \varepsilon > 0$. Поэтому она непрерывна при $t \neq 0$.

7.3.2 Интеграл $\mathcal{I}_{11}(t)$.

И виду (7.16) и аналогично (7.17), (7.19), для любого $k \leq k_*$ имеем

$$\partial^k \mathcal{I}_{11}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-1} \left(\int_{x^\perp} d_y^k f_{11}(u, x, \bar{y} + \tau x|x|^{-2}) [x|x|^{-2}] d\bar{y} \right) dx du.$$

Легко видеть, что $\mathcal{I}_{11}(t)$ — C^k -гладкая функция, и поскольку $M > d$ и $|\bar{y} + \tau x|x|^{-2}| \geq |\bar{y}|$, то

$$|\partial^k \mathcal{I}_{11}(t)| \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} \quad \forall t. \quad (7.32)$$

Пусть теперь $|t| \geq 1$. Запишем $\partial^k \mathcal{I}_{11}$ в виде

$$\partial^k \mathcal{I}_{11}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-k-1} \int_{x^\perp} \Phi_k(\bar{z}) d\bar{y} dx du, \quad (7.33)$$

где $\bar{z} = (u, x, \bar{y})$, $\bar{y} \in x^\perp$, и

$$|\Phi_k(\bar{z})| \lesssim_k \|f\|_{k,M} \langle \hat{z} \rangle^{-M}, \quad \hat{z} = (u, x, \bar{y} + \tau x |x|^{-2}). \quad (7.34)$$

Очевидным образом

$$|\hat{z}| \geq |\bar{z}|, \quad |\hat{z}| \geq 2^{-1/2} (|\bar{z}| + |\tau| |x|^{-1}). \quad (7.35)$$

Ниже мы различаем случаи $n \geq 1$ и $n = 0$.

1) Пусть $n \geq 1$.

а) Сначала проинтегрируем в (7.33) по u в сферическом слое

$$O := \{u : |\tau| = |t - \frac{1}{2}|u|^2| \leq \frac{1}{2}t\}.$$

Он пуст, если $t < 0$, а при $t \geq 0$ $O = \{u : t \leq |u|^2 \leq 3t\}$. В силу (7.34) и первого соотношения в (7.35), при $t \geq 0$ часть интеграла в (7.33) с $u \in O$ ограничена величиной

$$K := C_k \|f\|_{k,M} \int_O \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-k-1} \int_{x^\perp} (|t| + |x|^2 + |\bar{y}|^2)^{-M/2} d\bar{y} dx du.$$

Так как $\int_O 1 du \leq Ct^{n/2}$, то, полагая $r = |x|$, $|t| + r^2 = T^2$ и $R = |\bar{y}|/T$, находим, что

$$K \lesssim_k \|f\|_{k,M} t^{n/2} \int_{1/2}^\infty r^{d_1-2-k} T^{d_1-1-M} \int_0^\infty R^{d_1-2} (1+R^2)^{-M/2} dR dr.$$

Интеграл по dR ограничен так как $M > d_1$, так что

$$K \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} t^{n/2} \int_{1/2}^\infty r^{d_1-2-k} (|t| + r^2)^{(d_1-1-M)/2} dr.$$

Вспоминая, что мы рассматриваем случай $t \geq 1$, положим $r = \sqrt{t}l$. Тогда

$$K \lesssim_{kM} \|f\|_{k,M} t^{\frac{n+1+d_1-2-k+d_1-1-M}{2}} \int_{t^{-1/2}/2}^\infty l^{d_1-2-k} (1+l^2)^{\frac{d_1-1-M}{2}} dl.$$

Поскольку $M > 2d_1$, то интеграл по l сходится и мы получаем

$$K \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} |t|^{-(M+2-d+k)/2} |t|^{\max(0, k+1-d_1)/2} Y(t),$$

где $Y = \ln t$ если $k = d_1 - 1$ и $Y = 1$ в противном случае. Тогда в случае $Y = 1$ компонента (7.33), соответствующая интегрированию по $u \in O$, ограничена величиной

$$C(k, M, d) \|f\|_{k,M} |t|^{-\kappa}, \quad \kappa = \frac{M+2-d}{2}, \quad (7.36)$$

для всех $|t| \geq 1$, так как $\max(0, k+1-d_1) \leq k$. При $Y = \ln t$ такая же оценка верна и в случае $d_1 \geq 2$, поскольку $\max(0, k+1-d_1) < k$. В случае когда $d_1 = 1$ и $Y = \ln t$ (т.е. $k = 0$) мы получаем (7.36) с κ замененным любым $\kappa' < \kappa$ (и с константой C , зависящей от κ').

б) Теперь рассмотрим интеграл по $u \in O^c = \mathbb{R}^n \setminus O$. Там $|\tau| = |t - \frac{1}{2}|u|^2| \geq \frac{1}{2}|t|$. Тогда по неравенствам (7.34) и (7.35), $|\Phi_k(\bar{z})| \lesssim_k \langle (u, \bar{y}) \rangle^{-M}$ и $|\Phi_k(\bar{z})| \lesssim_k (|t||x|^{-1} + |x|)^{-M}$. Пусть $M = M_1 + M_2$ для некоторых $M_j \geq 0$. Тогда часть интеграла (7.33), отвечающая $u \in O^c$, ограничена величиной

$$C \|f\|_{k,M} \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-1-k} (|t||x|^{-1} + |x|)^{-M_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{x^\perp} \langle (u, \bar{y}) \rangle^{-M_2} d\bar{y} du \right) dx.$$

Выбирая $M_2 = n + d_1 - 1 + \gamma$ с $0 < \gamma < 1$ (тогда $M_1, M_2 > 0$ так как $M > d$) получаем, что интеграл по $du d\bar{y}$ ограничен $C(\gamma)$ для любого γ . Поскольку по неравенству Юнга ⁶

$$(A + B)^{-1} \leq C_a A^{-a} B^{a-1}, \quad 0 < a < 1,$$

для любых $A, B > 0$, то $(|t||x|^{-1} + |x|)^{-M_1} \leq C_a |x|^{(2a-1)M_1} |t|^{-aM_1}$ для $0 < a < 1$. Таким образом, приведенный выше интеграл ограничен величиной

$$C(\gamma) \|f\|_{k,M} |t|^{-aM_1} \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-1-k+bM_1} dx, \quad b = 2a - 1 \in (-1, 1).$$

Обозначим $b_* = \frac{1+k-d_1}{M_1}$. Тогда для $b = b_*$ показатель степени для $|x|$ в приведенной выше формуле равен $-d_1$ и $b_* > -1$, если γ достаточно мало, так как $M > d$. Замечая, что

$$a(b_*)M_1 = \frac{b_* + 1}{2} M_1 = \frac{M + 2 + k - d - \gamma}{2} = \kappa + \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

(κ определено в (7.36)), мы видим, что часть интеграла (7.33), соответствующая $u \in O^c$,

$$\begin{aligned} &\text{ограничена (7.36), если } k \geq 1, \text{ а при } k = 0 \text{ ограничена} \\ &\text{(7.36) с заменой } \kappa \text{ любой } \kappa' < \kappa. \end{aligned} \quad (7.37)$$

2) Теперь пусть $n = 0$. Тогда

$$\left| \partial^k \mathcal{I}_{11}(t) \right| \leq \int_{|x| \geq 1/2} |x|^{-1-k} \int_{x^\perp} \Phi_k(\bar{z}) d\bar{y} dx, \quad \bar{z} = (x, \bar{y}), \quad (7.38)$$

⁶ Действительно, по неравенству Юнга при $p = 1/a, q = 1/(1-a)$ имеем что $A^a B^{(1-a)} \leq aA + (1-a)B \leq C_a(A+B)$. Это доказывает утверждение.

где $|\Phi_k(\bar{z})| \lesssim_k \langle \hat{z} \rangle^{-M}$ с $\hat{z} = (x, \bar{y} + tx|x|^{-2})$. Дословно повторяя шаг 1b) с $n = 0$, мы получаем это для $|t| \geq 1$ интеграл в (7.38) также может быть оценен величиной (7.36). Напомним, что при $|t| \leq 1$ производная $\partial^k \mathcal{I}_{11}(t)$ оценена в (7.32).

7.3.3 Интеграл $\mathcal{I}_{10}(t)$.

Теперь мы используем вторую дезинтеграцию в (7.13) вместо первой. Так как в виду (7.16) на носителе подынтегральной функции $|y| \geq 1/\sqrt{2}$, то повторяя использованное выше рассуждение и при этом меняя местами x и y мы получаем, что $\mathcal{I}_{10}(t)$ удовлетворяет тем же оценкам, что и $\mathcal{I}_{11}(t)$.

7.3.4 Завершение доказательства теоремы 7.1

Наконец,

– сочетая соотношения (7.24), (7.28), (7.31) и (7.32) мы оцениваем $\partial^k \mathcal{I}(t)$ при $0 < |t| \leq 4$,

в то время как

– сочетая соотношения (7.29), (7.36), (7.37) и используя тот факт, что $\partial^k \mathcal{I}_{00>}(t)$ и $\partial^k \mathcal{I}_{00}(t)$ зануляются при $|t| \geq 4$ если $n = 0$, мы оцениваем $\partial^k \mathcal{I}(t)$ для $t \geq 4$.

По причине, объясненной в конце раздела 7.3.1, задействованные производные являются непрерывными функциями. Это доказывает теорему.

7.4 Линейные преобразования квадратик

В этом пункте мы обозначаем через C_0 пространства непрерывных функций с компактным носителем.

В $\mathbb{R}^d = \{z\}$ рассмотрим квадратичную форму с действительными коэффициентами⁷ $F(z) = \frac{1}{2}Az \cdot z$ сигнатуры (n_0, n_+, n_-) такой, что $n_0 = 0$, $n_+ \geq n_- =: d_1 \geq 1$. Обозначим $n = n_+ - n_-$.

Используя стандартную диагональную нормальную форму для симметричной квадратичной формы, мы строим линейное преобразование

$$L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad z \mapsto Z = (u, x, y), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad x, y \in \mathbb{R}^{d_1},$$

⁷разделы 7.4-7.5 – это единственная часть нашей работы, где квадратичные формы могут иметь нерациональные коэффициенты.

такое, что $Q(L(z)) = F(z)$, где $Q(Z) = \frac{1}{2}|u|^2 + x \cdot y$. Рассмотрим соответствующие квадрики $\Sigma_t^Q = \{Z : Q(Z) = t\}$, $\Sigma_t^F = \{z : F(z) = t\}$, и δ -меры μ_t^Q, μ_t^F на них (например, см. [14, раздел II.7]):

$$\langle \mu_t^Q, f^Q \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon \leq Q(Z) \leq t+\varepsilon} f^Q(Z) dZ, \quad (7.39)$$

$$\langle \mu_t^F, f^F \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon \leq F(z) \leq t+\varepsilon} f^F(z) dz,$$

где $f^Q, f^F \in C_0(\mathbb{R}^d)$, и $\langle \mu, f \rangle$ означает интеграл от функции f по мере μ . Тогда μ_t^Q и μ_t^F — это борелевские меры в \mathbb{R}^d с носителями, соответственно, в Σ_t^Q и Σ_t^F , и для функций $f^Q \in C_0(\Sigma_t^Q \setminus \{0\})$ и $f^F \in C_0(\Sigma_t^F \setminus \{0\})$ мы имеем

$$\langle \mu_t^Q, f^Q \rangle = \int_{\Sigma_t^Q} \frac{f^Q(Z)}{|\nabla Q(Z)|} dZ|_{\Sigma_t^Q}, \quad \langle \mu_t^F, f^F \rangle = \int_{\Sigma_t^F} \frac{f^F(z)}{|\nabla F(z)|} dz|_{\Sigma_t^F}.$$

Здесь $dZ|_{\Sigma_t^Q(\text{or } F)}$ — элемент объема на $\Sigma_t^Q \setminus \{0\}$, индуцированный из \mathbb{R}^d , см. [14]. Пусть теперь $f^F = f^Q \circ L$. Тогда интеграл в (7.39) равен

$$\int_{t-\varepsilon \leq Q(Z) \leq t+\varepsilon} f^Q(Z) dZ = |\det(L)| \int_{t-\varepsilon \leq F(z) \leq t+\varepsilon} f^F(z) dz,$$

поэтому переходя к пределу, мы получаем, что

$$L \circ (|\det(L)|\mu_t^F) = \mu_t^Q. \quad (7.40)$$

Таким образом, чтобы исследовать функцию

$$t \mapsto \mathcal{I}^F(t; f) = \langle \mu_t^F, f \rangle, \quad \mu_t^F = |\nabla F(z)|^{-1} dz|_{\Sigma_t^F}, \quad (7.41)$$

мы можем использовать любую линейную систему координат в \mathbb{R}^d , так как меняя координаты мы лишь изменяем функцию \mathcal{I}^F умножением на постоянный множитель.

7.5 Знакоопределенные формы

Наконец, рассмотрим случай, когда $n_0 = 0$ и $\min(n_+, n_-) = 0$, т.е. когда форма $F(z) = \frac{1}{2}Az \cdot z$ является знакоопределенной и невырожденной. Предположим для определенности, что $n_- = 0$. Тогда существует линейное преобразование L такое, что $F(z) = Q(L(z))$, где $Q(Z) = \frac{1}{2}|Z|^2$,

$Z \in \mathbb{R}^d$. Теперь квадррика Σ_t сводится к пустому множеству при $t < 0$, поэтому функция $\mathcal{I}^F(t)$ (см. (7.41)) обращается в нуль при $t < 0$. Вычисления предыдущего подраздела остаются верными и в этом случае, поэтому (7.40) и замена координат $Z = \sqrt{2t} Z'$ показывают, что

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^F(t; f) &= C(d, L)t^{-1} \int_{|Z|=\sqrt{2t}} f^Q(Z) \mu_{S_{\sqrt{2t}}^{d-1}}(dZ) \\ &= C(d, L)t^{d/2-1} \int_{|Z'|=1} f^Q(\sqrt{2t}Z') \mu_{S_1^{d-1}}(dZ'), \quad t > 0, \quad f^Q = f \circ L^{-1}, \end{aligned}$$

где $\mu_{S_r^{d-1}}$ – элемент объема на $(d-1)$ -сфере радиуса r . Из этого соотношения мы сразу получаем, что это для любого $k \leq \min(d/2 - 1, k_*)$,

$$\left| \partial^k \mathcal{I}^F(t) \right| \lesssim_k \|f\|_{k,0} \quad \text{если } 0 \leq t \leq 1,$$

и

$$\left| \partial^k \mathcal{I}^F(t) \right| \lesssim_{k,M} \|f\|_{k,M} t^{-(M+2+k-d)/2} \quad \text{если } t \geq 1.$$

7.6 Общий результат

Просуммируем полученные результаты в следующем утверждении:

Теорема 7.3. *Рассмотрим любую невырожденную квадратичную форму $F(z) = \frac{1}{2}Az \cdot z$ на \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ и функцию $f \in C^{k_*,M}(\mathbb{R}^d)$, $M > d$. Тогда соответствующий интеграл $\mathcal{I}^F(t; f) = \langle \mu_t^F, f \rangle$ (см. (7.41)) удовлетворяет утверждениям теоремы 7.1.*

Доказательство. i) Если $n_+ \geq n_-$, то линейной заменой переменных можно привести F к нормальной форме (7.1), где $d_1 \geq 0$. Теперь утверждение следует из рассуждений в подразделах 7.4, 7.5. и теоремы 7.1.

ii) Если $n_- > n_+$, то квадратичная форма $-F$ является такой, как в i), и утверждение снова следует, так как очевидным образом $\mathcal{I}^{-F}(t; f) = \mathcal{I}^F(-t; f)$. \square

А Член J_0 : случай $d = 4$

В этом параграфе мы исследуем асимптотическое поведение члена J_0 из (1.19) в случае, когда

$$d = 4 \quad \text{и} \quad m = 0. \tag{A.1}$$

Далее в этом разделе мы всегда предполагаем выполнение (A.1).

A.1 Предварительные результаты и определения

Нам понадобятся леммы 30 и 31 из [11], ограниченные на случай $m = 0$ и $d = 4$, формулировку которых мы приводим ниже без доказательства. Напомним, что константы $\sigma_{\mathbf{c}}^*(A)$ определены в (1.10), а $\sigma^*(A) = \sigma_{\mathbf{0}}^*(A)$. Положим $\alpha := 7/2$ и напомним (A.1).

Лемма A.1 (лемма 30 из [11]). *Для любых $\varepsilon > 0$ и $X \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{q \leq X} S_q(\mathbf{c}; A, 0) = \eta(\mathbf{c}) \sigma_{\mathbf{c}}^*(A) \sum_{q \leq X} q^{d-1} + O_\varepsilon(X^{\alpha+\varepsilon}(1 + |\mathbf{c}|)), \quad (\text{A.2})$$

где $\eta(\mathbf{c}) = 1$, если $\mathbf{c} \cdot A^{-1}\mathbf{c} = 0$ и одновременно $\det A$ является квадратом целого числа, и $\eta(\mathbf{c}) = 0$ в противном случае. Кроме того, $|\sigma_{\mathbf{c}}^*(A)| \lesssim_\varepsilon 1 + |\mathbf{c}|^\varepsilon$, если $\eta(\mathbf{c}) \neq 0$.

Лемма A.2 (лемма 31 из [11]). *Если определитель $\det A$ является квадратом целого числа, то для любых $\varepsilon > 0$ и $X \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{q \leq X} q^{-d} S_q(0; A, 0) = \sigma^*(A) \log X + \hat{C}_A + O_\varepsilon(X^{\alpha+\varepsilon-d}),$$

где \hat{C}_A — константа, зависящая только от A . В противном случае, когда $\det A$ не является квадратом целого числа, для любых $\varepsilon > 0$ и $X \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{q \leq X} q^{-d} S_q(0; A, 0) = L(1, \chi) \prod_p (1 - \chi(p)p^{-1}) \sigma_p(A, 0) + O_\varepsilon(X^{-1/2+\varepsilon}),$$

где χ — символ Якоби ($\frac{\det(A)}{*}$), а $L(1, \chi)$ — L -функция Дирихле.

Далее нам понадобится следующая конструкция. Для $r \in \mathbb{R}_{>0}$ определим

$$I^*(r) := \tilde{I}_{rL}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} w(\mathbf{z}) h(r, F^0(\mathbf{z})) d\mathbf{z}. \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим функцию $K(\rho; w, A)$, $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, заданную равенством

$$K(\rho) := \eta(0) \sigma^*(A) \left(\sigma_\infty(w; A, 0) \log \rho + \int_\rho^\infty r^{-1} I^*(r) dr \right) + \sigma_\infty(w; A, 0) \hat{C}_A, \quad (\text{A.4})$$

где постоянная $\eta(0)$ определена в лемме A.1, а \hat{C}_A — в лемме A.2. Заметим, что функции $I^*(r)$ и $K(\rho)$ не зависят от L .

Покажем, что функция $K(\rho)$, $\rho > 0$, продолжается по непрерывности в точку $\rho = 0$. Действительно, для $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$

$$K(\rho_2) - K(\rho_1) = \eta(0)\sigma^*(A) \left(\sigma_\infty(w; A, 0) \log(\rho_2/\rho_1) - \int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{-1} I^*(r) dr \right). \quad (\text{A.5})$$

Используя равенство $I^*(r) = L^{-d} I_{rL}(0)$ (см. (3.8)), запишем член $I^*(r)$ из (A.5) в форме, найденной в предложении 3.8 b). Тогда $I^*(r)$ принимает вид правой части (3.11), разделенной на L^d , где $q = rL$. Ведущий член полученной формулы для $I^*(r)$ равен $\sigma_\infty(w; A, 0)$, так что соответствующий интеграл $\int_{\rho_1}^{\rho_2} r^{-1} \sigma_\infty dr$ в (A.5) сокращает первый член в скобках в (A.5). Тогда, полагая $M = d/2 - 1$, $\beta = r^{\bar{\gamma}}$, $\bar{\gamma} = \gamma/d$ и $0 < \gamma < 1$ в упомянутой формуле для $I^*(r)$, полученной из (3.11), мы находим

$$\begin{aligned} |K(\rho_2) - K(\rho_1)| &\lesssim_N \|w\|_{d/2-1, d+1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(r^{(1-\bar{\gamma})d/2-2} \langle \log r \rangle + r^{N-2} + r^{\bar{\gamma}N-2} \right) dr \\ &\lesssim_\gamma \rho_2^{d/2-1-\gamma} \|w\|_{d/2-1, d+1}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство получено выбором достаточно большого $N = N(\gamma)$ и следует из соотношения $r^{d/2(1-\bar{\gamma})-2} \langle \log r \rangle \lesssim_\gamma r^{d/2(1-\bar{\gamma})-2-\gamma/2} = r^{d/2-2-\gamma}$. Таким образом, $K(\rho)$ продолжается в точку $\rho = 0$ по непрерывности и

$$|K(\rho) - K(0)| \lesssim_\gamma \rho^{d/2-1-\gamma} \|w\|_{d/2-1, d+1}. \quad (\text{A.6})$$

Отсюда следует, что функция K является гёльдеровой в нуле с показателем $(d/2 - 1 - \gamma)$, для любой $\gamma > 0$.

A.2 Оценка члена J_0

Материал данного параграфа связан с разделом 13 в [11]. Мы ограничиваемся случаем, когда определитель $\det A$ является квадратом целого числа, так что, в частности, $\eta(0) = 1$. Это предположение используется только в доказательстве леммы A.5, когда применяется лемма A.2. Случай определителя, не являющегося квадратом, проще и получается аналогично, с помощью второго пункта леммы A.2.

Предложение A.3. *Предположим, что определитель $\det A$ является квадратом целого числа. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1/5$*

$$\begin{aligned} J_0 &= \sigma_\infty(w; A, 0) \sigma^*(A) L^d \log L + K(0; w, A) L^d \\ &\quad + O_\varepsilon(L^{d-\varepsilon} (\|w\|_{d/2-1, d-1} + \|w\|_{0, d+1})). \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем член J_0 в форме (1.21), $J_0 = J_0^+ + J_0^-$, где

$$J_0^+ := \sum_{q > \rho L} q^{-d} S_q(0) I_q(0) \quad \text{и} \quad J_0^- := \sum_{q \leq \rho L} q^{-d} S_q(0) I_q(0),$$

а $\rho \leq 1$. Требуемое утверждение следует из приведенных ниже лемм А.4 и А.5. Напомним, что $\alpha = 7/2$.

Лемма А.4. Пусть $w \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Тогда для любых $\gamma > 0$, $\rho \leq 1$ и L , удовлетворяющих соотношению $\rho L > 1$,

$$\left| J_0^+ - L^d \eta(0) \sigma^*(A) \int_{\rho}^{\infty} r^{-1} I^*(r) dr \right| \lesssim_{\gamma} (\rho^{\alpha+\gamma-d-1} L^{\alpha+\gamma} + \rho^{-2} L^{d-1}) |w|_{L_1}.$$

Доказательство. В этом доказательстве для простоты мы обозначаем $I_q := I_q(0)$ и $S_q := S_q(0)$. Напомним формулу суммирования по частям для последовательностей (f_q) и (g_q) :

$$\sum_{m < q \leq n} f_q (g_q - g_{q-1}) = f_n g_n - f_{m+1} g_m - \sum_{m < q < n} (f_{q+1} - f_q) g_q.$$

Выберем произвольное $R \in \mathbb{N}$ и запишем эту формулу с $m = R$, $n = 2R$, $f_q = q^{-d} I_q$ и $g_q = \sum_{R < q' \leq q} S_{q'}$, так что $g_R = 0$ и $S_q = g_q - g_{q-1}$ при $q > R$. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{R < q \leq 2R} q^{-d} S_q I_q &= (2R)^{-d} I_{2R} \sum_{R < q \leq 2R} S_q \\ &\quad - \sum_{R < q < 2R} \tilde{\partial}_q (q^{-d} I_q) \sum_{R < q' \leq q} S_{q'}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где для последовательности (a_q) мы обозначили $\tilde{\partial}_q a_q := a_{q+1} - a_q$. Согласно (3.8)–(3.9),

$$I_q = L^d \int_{\mathbb{R}^d} w(\mathbf{z}) h(q/L, F^0(\mathbf{z})) d\mathbf{z}.$$

Тогда

$$|I_q| \lesssim \frac{L^{d+1}}{q} |w|_{L_1} \quad \text{и} \quad |\partial_q I_q| \lesssim \frac{L^{d+1}}{q^2} |w|_{L_1}, \quad (\text{A.8})$$

где первая оценка получается из следствия 3.3, а вторая — из леммы 3.2 с $m = 1$, $n = N = 0$. Таким образом, $|\tilde{\partial}_q (q^{-d} I_q)| \lesssim L^{d+1} q^{-d-2} |w|_{L_1}$. Согласно (A.2), где ε заменено на γ , для $R' \leq 2R$ имеем

$$\sum_{R < q \leq R'} S_q = \eta(0) \sigma^*(A) \sum_{R < q \leq R'} q^{d-1} + O_{\gamma}(R^{\alpha+\gamma}), \quad (\text{A.9})$$

где мы напоминаем, что $\sigma_0^*(A) = \sigma^*(A)$. Рассмотрим правую часть тождества (A.7) как линейный функционал $G((S_q))$ на пространстве последовательностей (S_q) . Тогда, вставляя формулу (A.9) в правую часть (A.7), мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{R < q \leq 2R} q^{-d} S_q I_q &= \eta(0) \sigma^*(A) G((q^{d-1})) \\ &+ O_\gamma \left(L^{d+1} |w|_{L^1} (R^{-d-1+\alpha+\gamma} + \sum_{R < q \leq 2R} q^{-d-2+\alpha+\gamma}) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

где член O_γ получается из (A.8) и оценки для $\tilde{\partial}_q(q^{-d} I_q)$ выше заменой суммы $\sum S_q, \sum S_{q'}$ в правой части (A.7) на $O_\gamma(R^{\alpha+\gamma})$. Согласно формуле суммирования по частям (A.7) с S_q , замененным на q^{d-1} , имеем $\sum_{R < q \leq 2R} q^{-d} q^{d-1} I_q = G((q^{d-1}))$. Тогда, согласно (A.10),

$$\sum_{R < q \leq 2R} q^{-d} S_q I_q = \eta(0) \sigma^*(A) \sum_{R < q \leq 2R} q^{-1} I_q + O_\gamma \left(L^{d+1} R^{-d-1+\alpha+\gamma} |w|_{L^1} \right).$$

Обозначая $R_l = \lfloor 2^l \rho L \rfloor$, мы получаем

$$\begin{aligned} J_0^+ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{R_l < q \leq R_{l+1}} q^{-d} I_q S_q \\ &= \eta(0) \sigma^*(A) \sum_{q > \rho L} q^{-1} I_q + O_\gamma \left(\rho^{\alpha+\gamma-d-1} L^{\alpha+\gamma} |w|_{L^1} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(d+1-\alpha-\gamma)} \right) \\ &= \eta(0) \sigma^*(A) \sum_{q > \rho L} q^{-1} I_q + O_\gamma \left(\rho^{\alpha+\gamma-d-1} L^{\alpha+\gamma} |w|_{L^1} \right). \end{aligned}$$

Остается сравнить сумму $A := \sum_{q > \rho L} q^{-1} I_q$ с интегралом $B := L^d \int_{\rho}^{\infty} r^{-1} I^*(r) dr$.

Так как $L^d I^*(r) = I_{rL}$, то при замене переменной интегрирования r на $q = rL$ интеграл B принимает вид $\int_{\rho L}^{\infty} q^{-1} I_q dq$. Тогда

$$|A - B| \leq \left| \sum_{q > \rho L} q^{-1} I_q - \int_{\lfloor \rho L \rfloor + 1}^{\infty} q^{-1} I_q dq \right| + \left| \int_{\rho L}^{\lfloor \rho L \rfloor + 1} q^{-1} I_q dq \right|. \quad (\text{A.11})$$

Ввиду (A.8), $|q^{-1} I_q| \lesssim q^{-2} L^{d+1} |w|_{L^1}$ и $|\partial_q(q^{-1} I_q)| \lesssim q^{-3} L^{d+1} |w|_{L^1}$. Таким образом, оба слагаемых из правой части (A.11) ограничены выражением $(\rho L)^{-2} L^{d+1} |w|_{L^1} = \rho^{-2} L^{d-1} |w|_{L^1}$. \square

Напомним, что постоянная \hat{C}_A введена в формулировке лемме A.2.

Лемма А.5. Пусть определитель $\det A$ является квадратом целого числа. Тогда для любых $\gamma > 0$, $N > 1$, $\rho \leq 1$ и L , удовлетворяющих соотношению $\rho L > 1$,

$$J_0^- = L^d \sigma_\infty(w; A, 0) \left(\sigma^*(A) \log(\rho L) + \hat{C}_A \right) + O_{\gamma, N} \left(\left(\rho^{\alpha+\gamma-d} L^{\alpha+\gamma} + L^d (\rho \log L + \rho^{N-1} + L^{1-d}) \right) \|w\|_{d/2-1, d+1} \right).$$

Доказательство. Вставляя равенство из предложения 3.8 б) с $M = d/2 - 1 = 1$ и $\beta = 1$ в определение члена J_0^- , находим $J_0^- = I_A + I_B$, где

$$I_A := L^d \sigma_\infty(w) \sum_{q \leq \rho L} q^{-d} S_q(0), \quad I_B := \sum_{q \leq \rho L} S_q(0) q^{-d} (f_q + g_q),$$

а

$$|f_q| \lesssim q L^{d-1} \left\langle \log \left(\frac{q}{L} \right) \right\rangle \|w\|_{d/2-1, d+1},$$

$$|g_q| \lesssim_N \left(q^N L^{d-N} + 1 \right) L q^{-1} \|w\|_{0, d+1}.$$

Согласно лемме А.2,

$$\sum_{q \leq \rho L} q^{-d} S_q(0) = \sigma^*(A) \log(\rho L) + \hat{C}_A + O_\gamma((\rho L)^{\alpha+\gamma-d}).$$

Тогда,

$$I_A = L^d \sigma_\infty(w) \left(\sigma^*(A) \log(\rho L) + \hat{C}_A \right) + O_\gamma(\sigma_\infty(w) L^{\alpha+\gamma} \rho^{\alpha+\gamma-d}),$$

при этом

$$|\sigma_\infty(w)| = |\sigma_\infty(w; A, 0)| = |\mathcal{I}(0)| \leq \|\mathcal{I}\|_{0,0} \lesssim_A \|\cdot\|_{0,+1} \quad (\text{A.12})$$

ввиду (3.13). Касательно члена I_B , лемма 2.1 вместе с равенством $d = 4$ влекут, что

$$|I_B| \lesssim \sum_{q \leq \rho L} q^{-1} (|f_q| + |g_q|) \lesssim_N L^d \left(\rho \log L + \rho^{N-1} + L^{1-d} \right) \|w\|_{d/2-1, d+1},$$

для $N \geq 2$. Требуемое утверждение следует из полученных оценок на I_A и I_B . \square

Завершим доказательство предложения А.3. Ведущий член в J_0 дается суммой ведущих членов в формулах для J_0^+ и J_0^- из лемм А.4 и А.5. Поскольку $\eta(0) = 1$, эта сумма принимает вид

$$\begin{aligned} L^d \sigma^*(A) \left(\int_{\rho}^{\infty} r^{-1} I^*(r) dr + \sigma_{\infty}(w) \log(\rho L) \right) + L^d \sigma_{\infty}(w) \hat{C}_A \\ = \sigma_{\infty}(w) \sigma^*(A) L^d \log L + K(0) L^d + O_{\gamma} (L^d \rho^{d/2-1-\gamma} \|w\|_{d/2-1, d+1}), \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы использовали (А.4) и (А.6). Таким образом,

$$\begin{aligned} J_0 = \sigma_{\infty}(w) \sigma^*(A) L^d \log L + K(0) L^d + O_{\gamma, N} \left((\rho^{\alpha+\gamma-d-1} L^{\alpha+\gamma} + \rho^{-2} L^{d-1} \right. \\ \left. + L^d (\rho^{d/2-1-\gamma} + \rho \log L + \rho^{N-1} + L^{1-d})) \|w\|_{d/2-1, d+1} \right), \end{aligned}$$

так как $|w|_{L_1} \lesssim \|w\|_{0, d+1}$. Выбирая $\rho = L^{-1/5}$, $N = 2$ и используя равенство $d = 4$, получаем желаемое утверждение. \square

А.3 Оценка члена $\sigma_1(w; A, L)$

В этом разделе мы находим для члена σ_1 из асимптотики в теореме 1.4 верхнюю оценку второго порядка малости.

В случае, когда определитель $\det A$ не является квадратом целого числа, σ_1 дается формулой (1.14), и требуемая оценка проста. Действительно, согласно лемме А.2 произведение $\prod_p (1 - \chi(p) p^{-1}) \sigma_p(A, 0)$ конечно (и не зависит от L). С другой стороны, согласно (А.12), $|\sigma_{\infty}(w; A, 0)| \lesssim \|w\|_{0, d+1}$. Таким образом,

$$|\sigma_1(w; A, L)| \lesssim \|w\|_{0, d+1}.$$

В случае, когда $\det A$ является квадратом целого числа, σ_1 задается формулой (1.24), и требуемая оценка менее тривиальна.

Предложение А.6. *Предположим, что $\det A$ — квадрат целого числа. Тогда*

$$|\sigma_1(w; A, L)| \lesssim \|w\|_{\tilde{N}, \tilde{N}+3d+4}, \quad \text{где} \quad \tilde{N} := d^2(d+3) - 2d.$$

Доказательство. Поскольку $\eta(\mathbf{c})$ принимает значения 0 или 1, согласно определению (1.24) члена σ_1 имеем

$$|\sigma_1(w)| \leq |K(0)| + \sum_{\mathbf{c} \neq 0: \eta(\mathbf{c})=1} |\sigma_{\mathbf{c}}^*(A) \sigma_{\infty}^{\mathbf{c}}(w)|. \quad (\text{А.13})$$

Сперва оценим член $K(0)$. Согласно (A.6),

$$|K(1) - K(0)| \lesssim \|w\|_{d/2-1, d+1}. \quad (\text{A.14})$$

С другой стороны, произведение $\sigma^*(A)$ не зависит от L и, в силу леммы A.2, ограничено. Тогда, согласно определению (A.4) функции $K(\rho)$,

$$|K(1)| \lesssim \int_1^\infty r^{-1} |I^*(r)| dr + |\sigma_\infty(w; A, 0) \hat{C}_A|.$$

Ввиду определения (A.3) интеграла $I^*(r)$ и следствия 3.3, $|I^*(r)| \lesssim r^{-1} \|w\|_{L^1} \lesssim r^{-1} \|w\|_{0, d+1}$. Тогда, с учетом (A.12), $|K(1)| \lesssim \|w\|_{0, d+1}$, так что в силу (A.14),

$$|K(0)| \lesssim \|w\|_{d/2-1, d+1}. \quad (\text{A.15})$$

Теперь оценим члены $\sigma_\infty^{\mathbf{c}}(w)$, определенные в (1.23):

$$\sigma_\infty^{\mathbf{c}}(w) = L^{-d} \sum_{q=1}^\infty q^{-1} I_q(\mathbf{c}; A, 0, L) = Y_1(\mathbf{c}) + Y_2(\mathbf{c}),$$

где $Y_1 = L^{-d} \sum_{q=1}^{L|\mathbf{c}|^{-M}} q^{-1} I_q(\mathbf{c})$, $Y_2 = L^{-d} \sum_{q>L|\mathbf{c}|^{-M}} q^{-1} I_q(\mathbf{c})$, а $M \in \mathbb{N}$ будет выбрано позже. Используя равенство $d = 4$, согласно лемме 6.2 имеем

$$|Y_1(\mathbf{c})| \lesssim_\gamma L^{-1+\gamma} |\mathbf{c}|^{-1+\gamma} C(w) \sum_{q=1}^{L|\mathbf{c}|^{-M}} q^{-\gamma} \lesssim |\mathbf{c}|^{-(1-\gamma)(M+1)} C(w),$$

где $C(w) := \|w\|_{\bar{N}, d+5} + \|w\|_{0, \bar{N}+3d+4}$. С другой стороны, согласно предложению 5.1, $|I_q(\mathbf{c})| \lesssim_N L^{d+1} q^{-1} |\mathbf{c}|^{-N} \|w\|_{N, 2N+d+1}$ для каждого $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|Y_2(\mathbf{c})| \lesssim_N L |\mathbf{c}|^{-N} \|w\|_{N, 2N+d+1} \sum_{q>L|\mathbf{c}|^{-M}} q^{-2} \lesssim |\mathbf{c}|^{-N+M} \|w\|_{N, 2N+d+1}.$$

Таким образом,

$$|\sigma_\infty^{\mathbf{c}}(w)| \lesssim_{\gamma, N} (|\mathbf{c}|^{-(1-\gamma)(M+1)} + |\mathbf{c}|^{-N+M}) (\|w\|_{\bar{N}, \bar{N}+3d+4} + \|w\|_{N, 2N+d+1}).$$

Согласно лемме A.1, $|\sigma_{\mathbf{c}}^*(A)| \lesssim_\gamma 1 + |\mathbf{c}|^\gamma$ при $\eta(\mathbf{c}) = 1$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{c} \neq 0: \eta(\mathbf{c})=1} |\sigma_{\mathbf{c}}^*(A) \sigma_\infty^{\mathbf{c}}(w)| \lesssim_{\gamma, N} \|w\|_{\bar{N}, \bar{N}+3d+4} + \|w\|_{N, 2N+d+1},$$

если M и $N - M$ достаточно велики, а γ достаточно мала. Выбирая $M = d$, $N = 2d + 1$ и $\gamma = 1/(d + 3)$, получаем $\bar{N} = d^2(d + 3) - 2d$. Вместе с (A.13) и (A.15) это влечет требуемое утверждение.

В Константы $\sigma(A, 0)$ и $\sigma^*(A)$

Ясно, что наш результат дает приближение к ряду $N_L(w; A, m)$ через сингулярный интеграл $\sigma_\infty(w)$, только если сингулярный ряд $\sigma(A, m)$ (или $\sigma^*(A)$) строго положителен. В действительности известно, что сингулярный ряд строго положителен при очень общих условиях, а именно, для неособых форм любой степени, имеющих неособые решения в \mathbb{R} и в каждом p -адическом поле (при условии, что ряд абсолютно сходится), см. например, раздел 7 в [1]. Однако, поскольку наиболее интересный случай в приложении к математической физике – это случай квадратичной формы (В.1) $F_d(x, y)$ ниже, мы даем в этом приложении В прямой элементарный вывод оценки констант $\sigma(A, 0)$ при $d \geq 5$ и $\sigma^*(A)$ при $d = 4$, независимо от общей теории.

Таким образом, в этом разделе мы рассматриваем случай квадратичной формы

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{d/2} x_i y_i =: F_d(x, y), \quad \text{где} \quad d = 2s \geq 4 \quad (\text{В.1})$$

и $x = (x_1, \dots, x_s)$, $y = (y_1, \dots, y_s)$. Наша цель – вычислить константы $\sigma(A, 0)$ при $d \geq 5$ и $\sigma^*(A)$ при $d = 4$. Ниже мы используем обычную запись для делимости (или не делимости) на m целочисленного вектора s (например, $2|(8, 6)$ и $2 \nmid (8, 7)$).

Ввиду определений (1.10)–(1.11) наша первая цель состоит в том, чтобы вычислить константы $\sigma_p(A, 0)$. Для простых p и $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$S_p(k) = \{(x, y) \bmod p^k : F_d(x, y) = 0 \bmod p^k\}$$

и обозначим $N_p(k) := \#S_p(k)$. Заметим, что множество $S_p(k)$ и константа $N_p(k)$ зависят от d . Константы σ_p можно переписать в виде

$$\sigma_p(d) := \sigma_p(A, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_p(k)}{p^{(d-1)k}}. \quad (\text{В.2})$$

Это соотношение приводится в [11], р. 199, без доказательства; мы даем его элементарный вывод в конце этого приложения.

Пусть $\mathcal{N}_p(d) := N_p(1)$ – количество \mathbb{F}_p -рациональных точек на гиперповерхности $\{F_d = 0 \bmod p\}$.

Лемма В.1. *Для любого простого числа p ,*

$$\sigma_p(d) = \frac{\mathcal{N}_p(d) - 1}{p^{d-1} - p^{1-d}}. \quad (\text{В.3})$$

Доказательство. Для $j = 0, 1, \dots, k$ определим $S_p(k, j)$ как множество пар $(x, y) \in S_p(k)$ таких, что

$$(x, y) = p^j(x', y') \pmod{p^k}, \text{ где } p \nmid (x', y').$$

Так, $S_p(k, 0) = \{(x, y) \in S_p(k) : p \nmid (x, y)\}$ и $S_p(k, k) = \{(0, 0)\}$. Множества $S_p(k, j)$ и $S_p(k, j')$ с $j \neq j'$ не пересекаются; обозначая $N_p(k, j) = \#S_p(k, j)$, имеем

$$S_p(k) = \bigcup_{j=0}^k S_p(k, j), \quad N_p(k) = \sum_{j=0}^k N_p(k, j).$$

В частности, $N_p(1, 0) = \mathcal{N}_p - 1$, так как $N_p(1, 1) = 1$. Мы утверждаем, что

$$N_p(k, 0) = N_p(k-1, 0)p^{(d-1)},$$

и поэтому

$$N_p(k, 0) = N_p(1, 0)p^{(d-1)(k-1)} = (\mathcal{N}_p - 1)p^{(d-1)(k-1)}. \quad (\text{B.4})$$

Используем индукцию по k . Пусть $k = 2$ и $(x, y) \in S_p(2, 0)$. Выразим (x, y) в виде $(x_0 + pa, y_0 + pb)$ с $(x_0, y_0), (a, b) \in \mathbb{F}_p^d$. Тогда $p \nmid (x_0, y_0)$, поэтому $(x_0, y_0) \in S_p(1, 0)$.

Зафиксируем теперь любые $(x_0, y_0) \in S_p(1, 0)$ и найдем $(a, b) \in \mathbb{F}_p^d$ такие, что $(x_0 + pa, y_0 + pb) \in S_p(2, 0)$. Поскольку $p^2 F(a, b) = 0 \pmod{p^2}$ и $p \nmid (x_0, y_0)$, то из соотношения $F(x, y) = 0 \pmod{p^2}$ следует нетривиальное линейное уравнение на $(a, b) \in \mathbb{F}_p^d$. Таким образом, каждый $(x_0, y_0) \in S_p(1, 0)$ порождает ровно p^{d-1} векторов $(x, y) \in S_p(2, 0)$, что доказывает формулу для $k = 2$. Этот аргумент остается в силе для любых $k \geq 2$, если мы представим $(x, y) \pmod{p^k}$ в виде $(x_0 + p^{k-1}a, y_0 + p^{k-1}b)$ с $(x_0, y_0) \in \mathbb{F}_{p^{k-1}}^d$ и $(a, b) \in \mathbb{F}_p^d$.

Пусть теперь $(x, y) \in S_p(k, j)$ с $j \geq 1$. Тогда $(x, y) = p^j(x', y') \pmod{p^k}$, где $p \nmid (x', y')$ и (x', y') удовлетворяет $p^{2j}F(x', y') = 0 \pmod{p^k}$. Таким образом, $(x', y') \in S_p(k-2j, 0)$, если $j \leq \frac{k-1}{2}$, т.е. $j \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor := j_k$. Пусть теперь $(x, y) \in S_p(k, j)$ с $j \geq 1$. Тогда $(x, y) = p^j(x', y') \pmod{p^k}$, где $p \nmid (x', y')$ и (x', y') удовлетворяет $p^{2j}F(x', y') = 0 \pmod{p^k}$. Таким образом, $(x', y') \in S_p(k-2j, 0)$, если $j \leq \frac{k-1}{2}$, т.е. $j \leq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil := j_k$.

Соответствие $(x, y) \mapsto (x', y')$ является корректно определенным отображением из $S_p(k, j)$ в $S_p(k-2j, 0)$. Действительно, если $(x_1, y_1) \sim (x, y)$ в $S_p(k, j)$, то $p^{k-j} \mid ((x_1', y_1') - (x', y'))$, поэтому $(x_1', y_1') \sim (x', y')$ в $S_p(k-2j, 0)$. Поскольку это отображение, очевидно, сюръективно, то получаем биекцию $S_p(k, j)$ на $S_p(k-2j, 0)$, из которой с учетом (B.4) следует

$$N_p(k, j) = N_p(k-2j, 0) = (\mathcal{N}_p - 1)p^{(d-1)(k-2j-1)}.$$

По (В.4) эта формула верна и при $j = 0$.

Любая пара (x, y) такая, что $p^j | (x, y)$ с $j \geq j_k + 1$, удовлетворяет $F(x, y) = 0 \pmod{p^k}$. Таким образом,

$$\sum_{j=j_k+1}^k N_p(k, j) = \#\{(x, y) \pmod{p^k} : (x, y) = 0 \pmod{p^{j_k+1}}\} = p^{d(k-j_k-1)} \leq p^{dk/2}.$$

Следовательно,

$$N_p(k) = (\mathcal{N}_p - 1) p^{(d-1)(k-1)} \sum_{j=0}^{j_k} p^{-2j(d-1)} + O(p^{dk/2}).$$

Тогда

$$\sigma_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_p(k)}{p^{(d-1)k}} = (\mathcal{N}_p - 1) p^{1-d} \sum_{j=0}^{\infty} p^{-2j(d-1)} = \frac{p^{1-d}(\mathcal{N}_p - 1)}{1 - p^{2-2d}},$$

откуда следует (В.3). \square

Теперь выведем формулу для $\mathcal{N}_p(d)$, используя индукцию по $d/2 = s$. При $d = 2$ имеем $\mathcal{N}_p(2) = \#\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : xy = 0 \pmod{p}\} = 2p - 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(d+2) &= \#\{\text{решения с } x_{s+1} = 0\} + \#\{\text{решения с } x_{s+1} \neq 0\} \\ &= p\mathcal{N}_p(d) + (p-1)p^d. \end{aligned}$$

Поэтому для любого четного $d = 2s \geq 2$,

$$\mathcal{N}_p(d) = p^{d-1} + p^s - p^{s-1},$$

так что

$$\sigma_p(d) = \frac{1 + p^{1-s} - p^{-s} - p^{1-d}}{1 - p^{2-2d}} = \frac{(1 + p^{1-s})(1 - p^{-s})}{1 - p^{2-2d}}.$$

Так как по формуле Эйлера $\prod_p (1 - p^{-l}) = 1/\zeta(l)$ для любого $l > 1$, то в случае $d = 4$ из (1.11) и найденной формулы для $\sigma_p(d)$ получаем, что

$$\sigma(A, 0; d = 4) = \prod_p \sigma_p(4) = \frac{\zeta(6)}{\zeta(2)} \prod_p (1 + p^{-1}).$$

Это произведение не сходится, но

$$\sigma^*(A; d = 4) = \prod_p (1 - p^{-1}) \sigma_p(4) = \frac{\zeta(6)}{\zeta(2)^2} = \frac{4\pi^2}{105} \simeq 0.376,$$

сходится. Далее,

$$\sigma(A, 0; d = 6) = \frac{\zeta(2)\zeta(10)}{\zeta(3)\zeta(4)} \simeq 1.265, \quad \sigma(A, 0; d = 8) = \frac{\zeta(3)\zeta(14)}{\zeta(4)\zeta(6)} \simeq 1.092,$$

и

$$1 < \sigma(A, 0; d) = \frac{\zeta(s-1)\zeta(2d-2)}{\zeta(s)\zeta(d-2)} = \frac{(1+2^{1-s})(1+2^{2-4s})}{(1+2^{-s})(1+2^{2-2s})} + o(1) = 1 + o(1)$$

стремится к 1, когда $d = 2s \geq 10$ растет.

Осталось доказать (B.2). По определению (1.10), $\sigma_p = \sum_{t=0}^{\infty} p^{-dt} S_{p^t}(\mathbf{0})$, где

$$S_{p^t}(\mathbf{0}) = \sum_{a \bmod p^t}^* \sum_{\mathbf{b} \bmod p^t} e_{p^t}(aF(\mathbf{b})).$$

Заметим, что $p^{-dt} S_{p^t}(\mathbf{0}) = 1$ при $t = 0$, а для $t = 1$ получаем:

$$\begin{aligned} p^{-d} S_p(\mathbf{0}) &= p^{-d} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{\mathbf{b} \bmod p} e_p(aF(\mathbf{b})) \\ &= p^{-d} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{\mathbf{b} \bmod p, p|F(\mathbf{b})} 1 + p^{-d} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{\mathbf{b} \bmod p, p \nmid F(\mathbf{b})} e_p(aF(\mathbf{b})) \\ &= p^{-d}(p-1)\mathcal{N}_p(d) + p^{-d}(-1)(p^d - \mathcal{N}_p(d)) = p^{1-d}\mathcal{N}_p(d) - 1, \end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{a=1}^{m-1} e_m(an) = -1, \quad (\text{B.5})$$

для любых $n, m \neq 0$ таких, что $(m, n) = 1$. Поэтому $\sum_{t=0}^1 p^{-dt} S_{p^t}(\mathbf{0}) = p^{1-d}\mathcal{N}_p(1)$.

Продолжим доказательство по индукции, предполагая, что для $k \geq 1$

$$\sum_{t=0}^k p^{-dt} S_{p^t}(\mathbf{0}) = p^{(1-d)k} \mathcal{N}_p(k).$$

Далее имеем,

$$S_{p^{k+1}}(\mathbf{0}) = \sum_{a \bmod p^{k+1}}^* \sum_{\mathbf{b} \bmod p^{k+1}} e_{p^{k+1}}(aF(\mathbf{b})) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \sum_{a \bmod p^{k+1}p^{k+1}|F(\mathbf{b})}^* 1 = p^k(p-1)N_p(k+1), \\ \Sigma_2 &:= \sum_{a \bmod p^{k+1}F(\mathbf{b})=lp^k}^* e_p(al) = -p^k(p^d N_p(k) - N_p(k+1)), \\ \Sigma_3 &:= \sum_{a \bmod p^{k+1}s=0}^* \sum_{F(\mathbf{b})=lp^s}^{k-1} e_{p^{k+1-s}}(al) = 0,\end{aligned}$$

с ненулевым $l = l(b)$ таким, что $p \nmid l$. Равенства выше получаются при последовательном применении (B.5).

Таким образом,

$$\frac{S_{p^{k+1}}(\mathbf{0})}{p^{d(k+1)}} = \frac{p^{k+1}N_p(k+1) - p^{d+k}N_p(k)}{p^{d(k+1)}} = \frac{N_p(k+1)}{p^{(d-1)(k+1)}} - \frac{N_p(k)}{p^{(d-1)k}},$$

что завершает шаг индукции и доказывает (B.2).

Список литературы

- [1] B. J. Birch, *Forms in Many Variables*, Proc. R. Soc. Lond. A **265** (1962), 245-263.
- [2] T. Buckmaster P. Germain Z. Hani J. Shatah, *Effective dynamics of the nonlinear Schrödinger equation on large domains*, Comm. Pure Appl. Math. **71** 1407–1460, (2018).
- [3] J.W.S. Cassels, *Rational Quadratic Forms*, North-Holland Mathematics Studies, 1982.
- [4] I. Chavel, *Riemannian Geometry: a Modern Introduction*, CUP 2006.
- [5] W. Duke, J. Friedlander and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-function*, Invent. Math., **112** (1993), 1-8.
- [6] A. Dymov, S. Kuksin, *Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: kinetic limit*, Comm. Math. Physics. **382** (2021), 951-1014.
- [7] A. Dymov, S. Kuksin, A. Maiocchi, S. Vlăduț, *The long space-period limit for equations of discrete turbulence*, arXiv:2104.11967.
- [8] A. Dymov, S. Kuksin, A. Maiocchi, S. Vlăduț, *Some remarks on Heath-Brown's theorem on quadratic forms*, arXiv:2104.11794.
- [9] H.L Eliasson, B. Grébert, S.B. Kuksin, *KAM for the nonlinear beam equation*, GAFA **26** (2016), 1588-1715.
- [10] J.R. Getz, *Secondary terms in asymptotics for the number of zeros of quadratic forms over number fields*, J. Lond. Math. Soc. (2) **98** (2018), 275-305.
- [11] D.R. Heath–Brown, *A new form of the circle method, and its application to quadratic forms*, J. Reine Angew. Math. **481** (1996), 149-206.
- [12] H. Iwaniec, *The circle method and the Fourier coefficients of modular forms*, in: Number theory and related topics, 47–55 (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989).
- [13] A.A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory*, Springer, 2012
- [14] A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Dover 1949.

- [15] J-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer, 1973.
- [16] T.H. Tran, *Secondary terms in asymptotics for the number of zeros of quadratic forms*, arXiv:1910.14530.
- [17] G.L.Watson, *Integral Quadratic Forms*, Cambridge Tracts in Math. **51** (Cambridge UP , 1960).