

CAPITOLO 6

ESEMPI

In questo capitolo vengono presentati alcuni esempi accademici relativi alle quattro condizioni di unicità con le relative stime di stabilità. Vengono elencati, per ogni esempio, i valori numerici delle tre grandezze. Ogni esempio richiede il calcolo di due soluzioni dello stesso problema inverso per poter applicare le stime di stabilità:

- soluzione di riferimento.
- soluzione dovuta a dati di potenziale "perturbati".

Gli esempi sono stati svolti utilizzando interamente l'applicazione.

Notazione: Verrà utilizzato il carattere normale per indicare le funzioni nel continuo (e.g. $t(\cdot)$) mentre si utilizzerà il grassetto (e.g. $\mathbf{t}_{1,2}$) per le funzioni discretizzate.

ATTENZIONE: l'esempio è descritto e svolto nelle pagine di testo.

Le fotografie riguardano lo svolgimento di altri problemi ed hanno solo scopo illustrativo.

6.3 - ESEMPIO 3 (Probl. di Cauchy regolare: valore noto conducibilità)

A) Problema di riferimento

Il dominio è $D = (0,1)$.

Potenziale: $u(x) = x^2 + x$.

hot 51 e 2

Sorgente: $f(x) = 6x^2 - 2x + (3/2)$.

hot 51 e 2

La *conducibilità* è espressa dalla legge:

$$t(j) = (x - (1/2))^2 + 1$$

Il potenziale non presenta punti critici mentre la conducibilità possiede un *punto stazionario* nel punto $x = (1/2)$.

Si imposta un numero di nodi pari a $J = 51$. Si impone il valore iniziale della conducibilità in $x = 0$ ossia nel nodo $j = 1$:

$$t(0) = (5/4).$$

Ad esso nel discreto corrisponde l'intervallo $(1, 2)$.

Ricorrendo alla media aritmetica si ottiene:

$$t_{[1,2]} = \frac{t(0) + t(1/50)}{2} = 1.240200000E+00.$$

I valori del *potenziale* sono:

C.1 - FINESTRA PRINCIPALE (MAIN WINDOW)

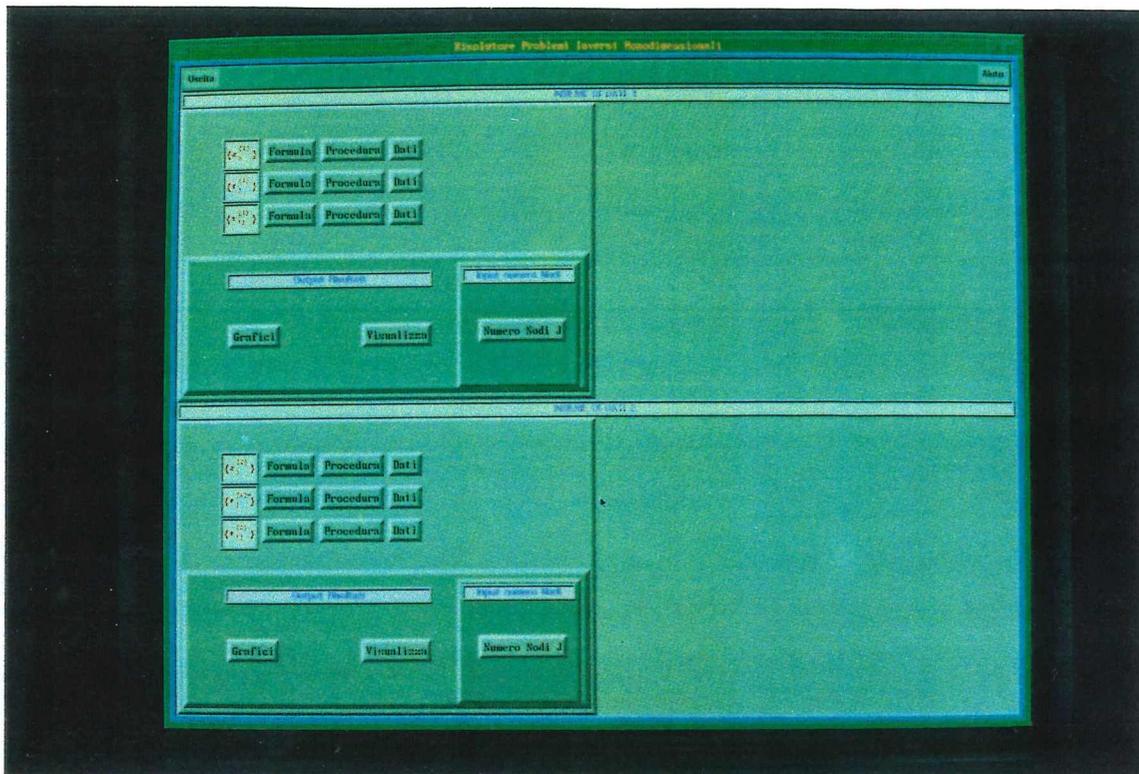


Fig. C.1 - Finestra Principale (Main Window)

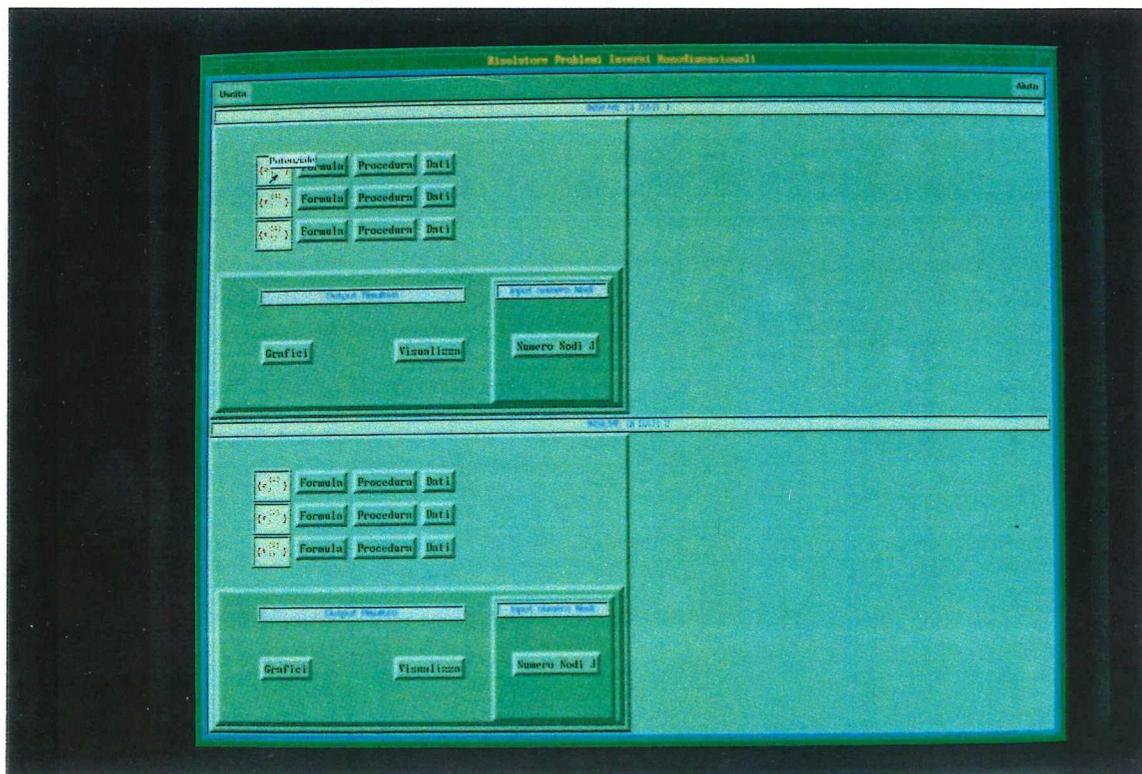


Fig. C.2 - Main Window: Etichetta descrittiva

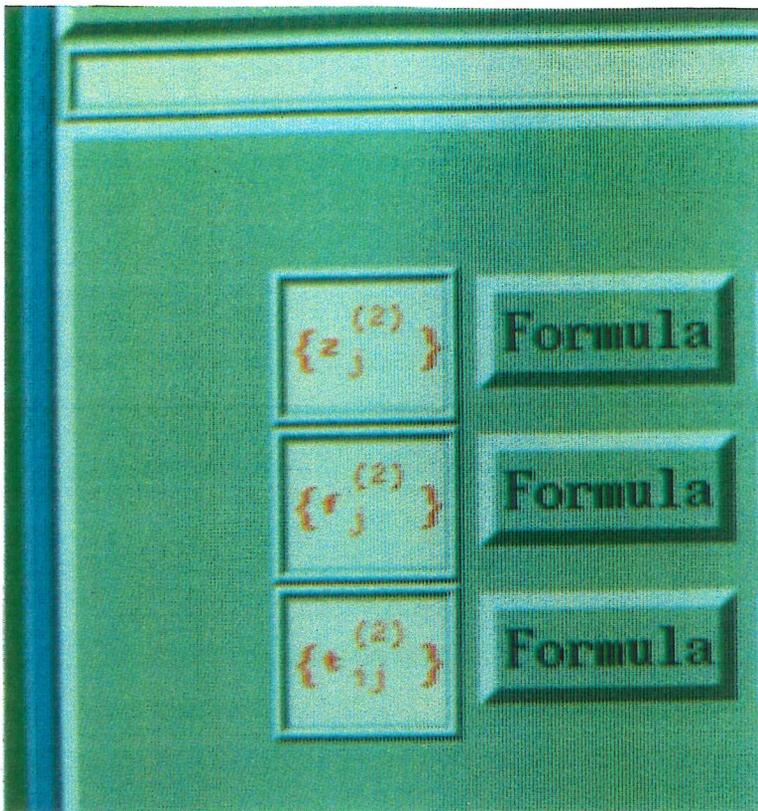


Fig. C.3 - Particolare Icone botoniera principale

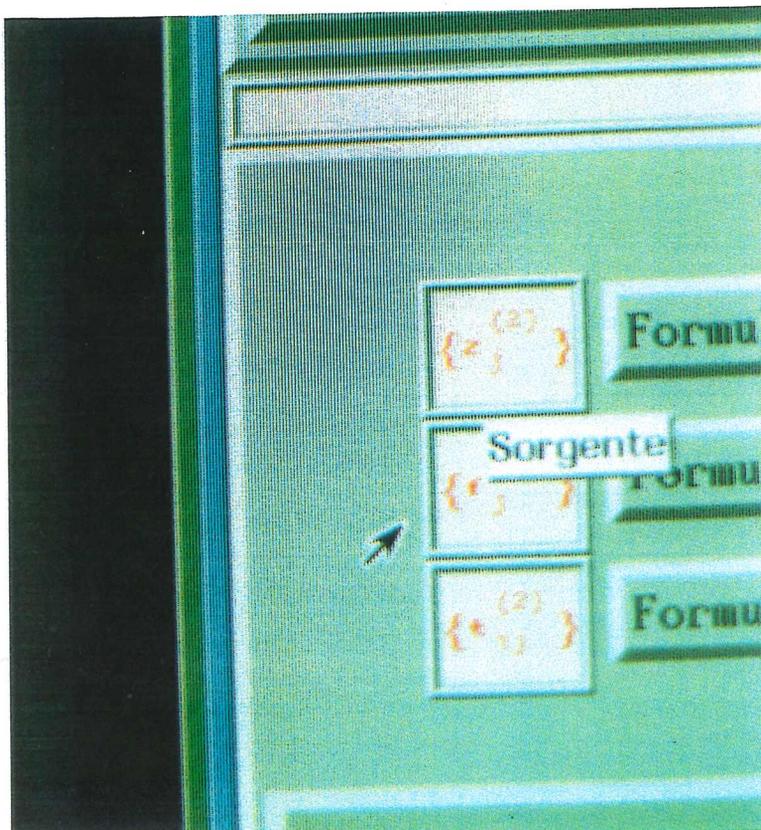


Fig. C.4 - Particolare icone: Etichetta descrittiva

C.2 - FINESTRA IMMISSIONE NUMERO DEI NODI

ATTENZIONE: i valori inseriti nelle finestre in fotografia riguardano altri problemi e devono perciò essere cambiati affinché corrispondano all'esempio corrente.

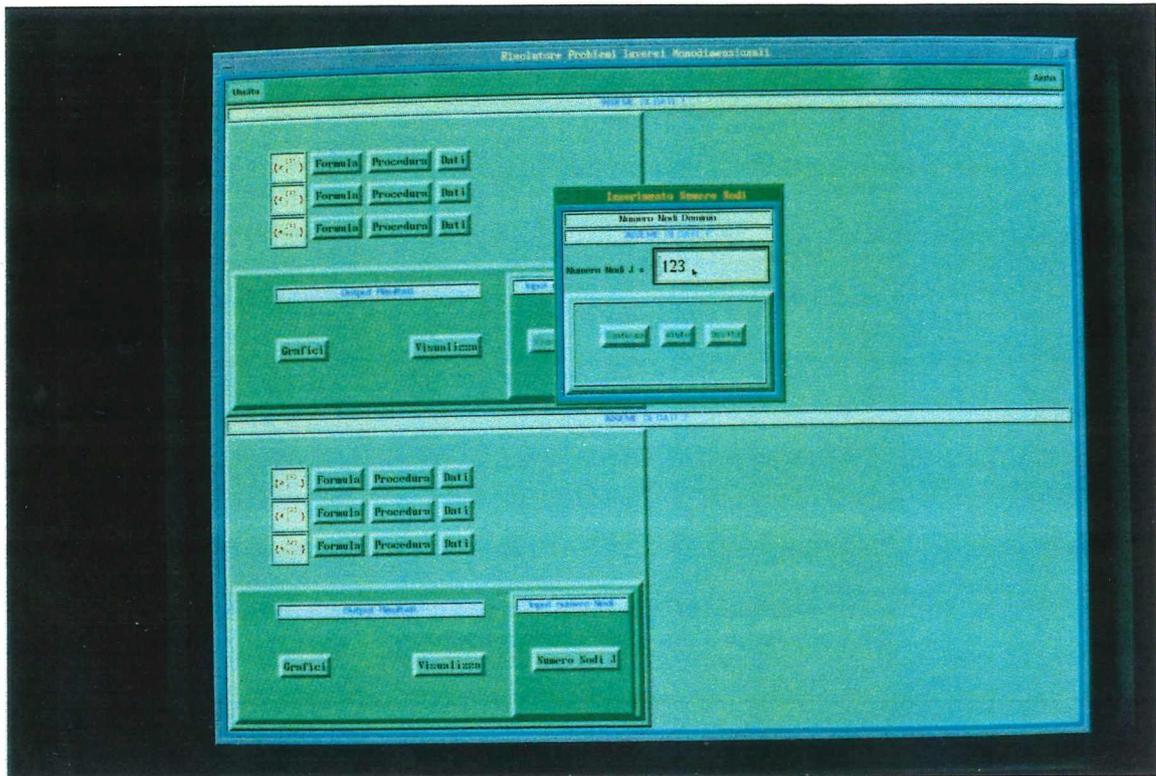


Fig. C.6 - Finestra per l'input del numero di nodi

C.4 - FORMULE

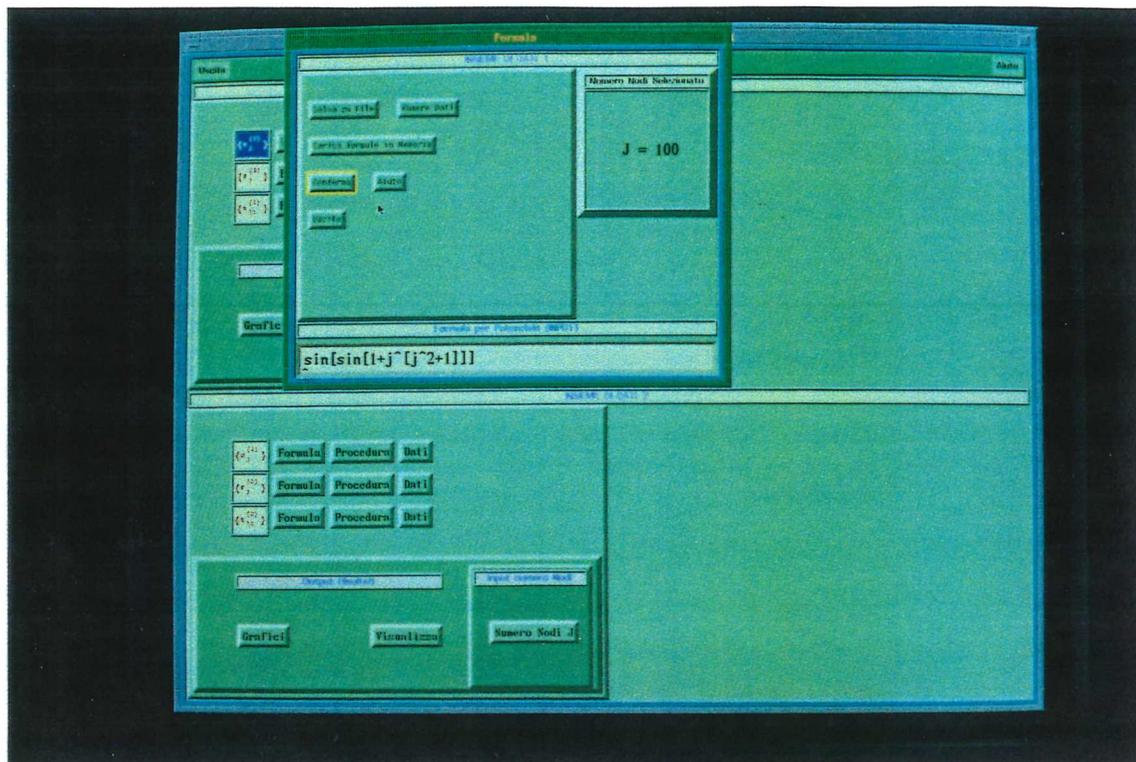


Fig. C.16 - Finestra per introduzione formule

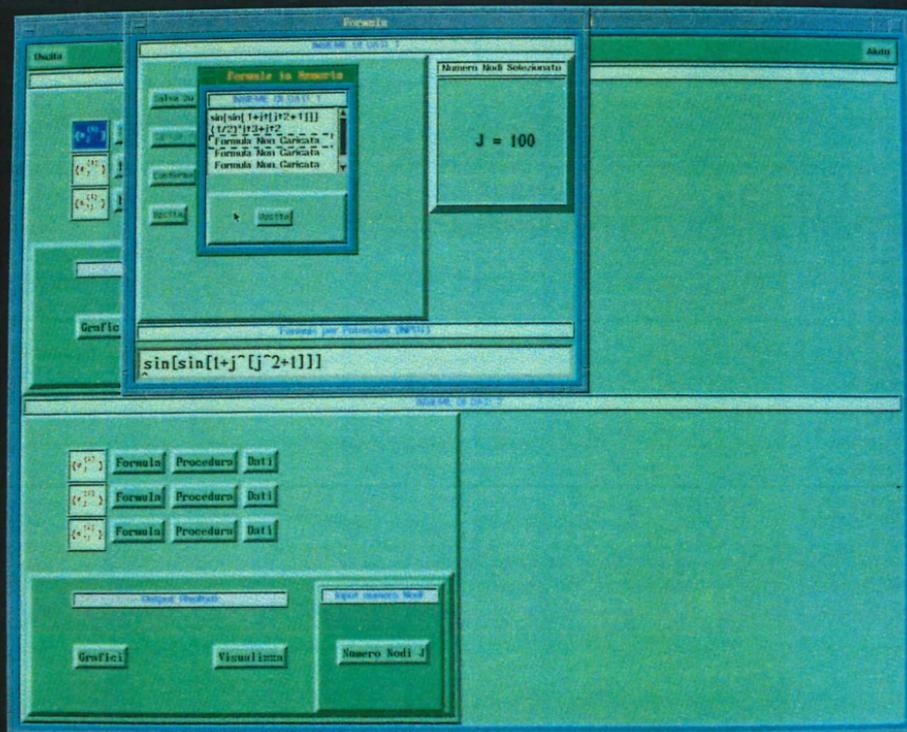


Fig. C.17 - Formula: finestra per caricamento formule da memoria

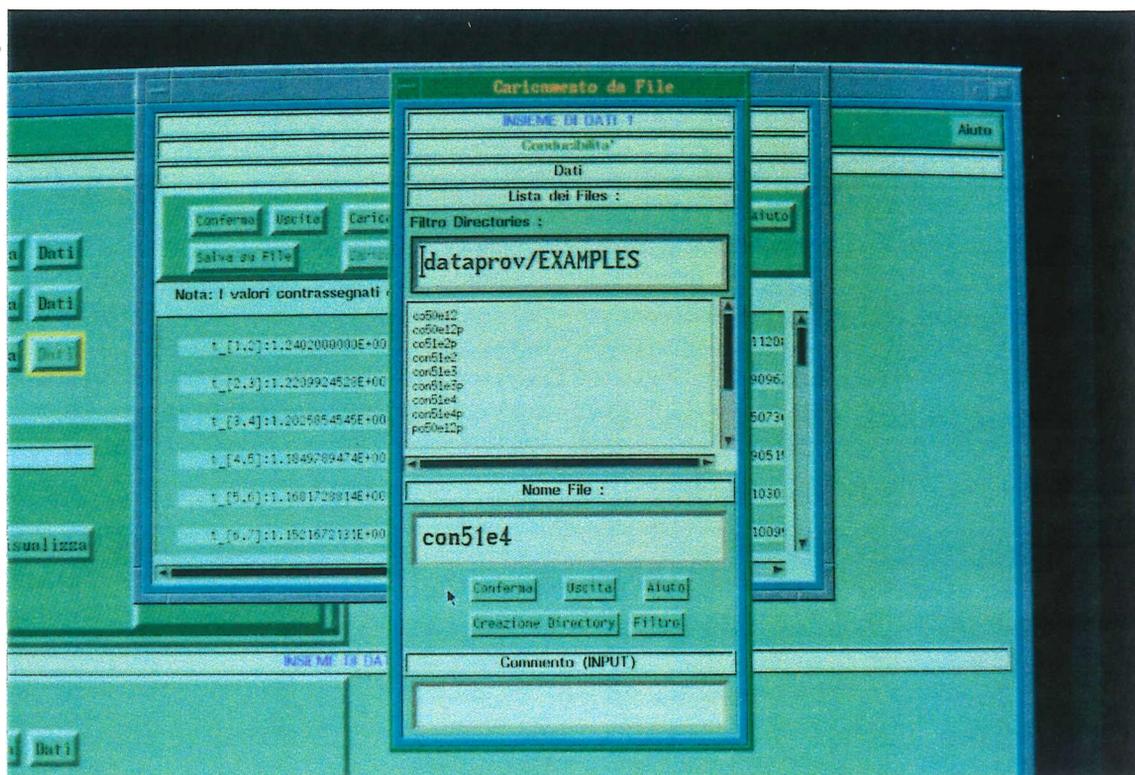


Fig. C.27 - Particolare finestra per il caricamento dati da file

Esempio 3

$z_{[1]}$: 0.0000000000E+00 $z_{[2]}$: 2.0400000000E -02 $z_{[3]}$: 4.1600000000E -02
 $z_{[4]}$: 6.3600000000E -02 $z_{[5]}$: 8.6400000000E -02 $z_{[6]}$: 1.1000000000E -01
 $z_{[7]}$: 1.3440000000E -01 $z_{[8]}$: 1.5960000000E -01 $z_{[9]}$: 1.8560000000E -01
 $z_{[10]}$: 2.1240000000E -01 $z_{[11]}$: 2.4000000000E -01 $z_{[12]}$: 2.6840000000E -01
 $z_{[13]}$: 2.9760000000E -01 $z_{[14]}$: 3.2760000000E -01 $z_{[15]}$: 3.5840000000E -01
 $z_{[16]}$: 3.9000000000E -01 $z_{[17]}$: 4.2240000000E -01 $z_{[18]}$: 4.5560000000E -01
 $z_{[19]}$: 4.8960000000E -01 $z_{[20]}$: 5.2440000000E -01 $z_{[21]}$: 5.6000000000E -01
 $z_{[22]}$: 5.9640000000E -01 $z_{[23]}$: 6.3360000000E -01 $z_{[24]}$: 6.7160000000E -01
 $z_{[25]}$: 7.1040000000E -01 $z_{[26]}$: 7.5000000000E -01 $z_{[27]}$: 7.9040000000E -01
 $z_{[28]}$: 8.3160000000E -01 $z_{[29]}$: 8.7360000000E -01 $z_{[30]}$: 9.1640000000E -01
 $z_{[31]}$: 9.6000000000E -01 $z_{[32]}$: 1.0044000000E+00 $z_{[33]}$: 1.0496000000E+00
 $z_{[34]}$: 1.0956000000E+00 $z_{[35]}$: 1.1424000000E+00 $z_{[36]}$: 1.1900000000E+00
 $z_{[37]}$: 1.2384000000E+00 $z_{[38]}$: 1.2876000000E+00 $z_{[39]}$: 1.3376000000E+00
 $z_{[40]}$: 1.3884000000E+00 $z_{[41]}$: 1.4400000000E+00 $z_{[42]}$: 1.4924000000E+00
 $z_{[43]}$: 1.5456000000E+00 $z_{[44]}$: 1.5996000000E+00 $z_{[45]}$: 1.6544000000E+00
 $z_{[46]}$: 1.7100000000E+00 $z_{[47]}$: 1.7664000000E+00 $z_{[48]}$: 1.8236000000E+00
 $z_{[49]}$: 1.8816000000E+00 $z_{[50]}$: 1.9404000000E+00 $z_{[51]}$: 2.0000000000E+00

I termini di sorgente sono:

$f_{[1]}$: 1.5000000000E+00 $f_{[2]}$: 1.4624000000E+00 $f_{[3]}$: 1.4296000000E+00
 $f_{[4]}$: 1.4016000000E+00 $f_{[5]}$: 1.3784000000E+00 $f_{[6]}$: 1.3600000000E+00
 $f_{[7]}$: 1.3464000000E+00 $f_{[8]}$: 1.3376000000E+00 $f_{[9]}$: 1.3336000000E+00
 $f_{[10]}$: 1.3344000000E+00 $f_{[11]}$: 1.3400000000E+00 $f_{[12]}$: 1.3504000000E+00
 $f_{[13]}$: 1.3656000000E+00 $f_{[14]}$: 1.3856000000E+00 $f_{[15]}$: 1.4104000000E+00
 $f_{[16]}$: 1.4400000000E+00 $f_{[17]}$: 1.4744000000E+00 $f_{[18]}$: 1.5136000000E+00
 $f_{[19]}$: 1.5576000000E+00 $f_{[20]}$: 1.6064000000E+00 $f_{[21]}$: 1.6600000000E+00
 $f_{[22]}$: 1.7184000000E+00 $f_{[23]}$: 1.7816000000E+00 $f_{[24]}$: 1.8496000000E+00
 $f_{[25]}$: 1.9224000000E+00 $f_{[26]}$: 2.0000000000E+00 $f_{[27]}$: 2.0824000000E+00
 $f_{[28]}$: 2.1696000000E+00 $f_{[29]}$: 2.2616000000E+00 $f_{[30]}$: 2.3584000000E+00
 $f_{[31]}$: 2.4600000000E+00 $f_{[32]}$: 2.5664000000E+00 $f_{[33]}$: 2.6776000000E+00
 $f_{[34]}$: 2.7936000000E+00 $f_{[35]}$: 2.9144000000E+00 $f_{[36]}$: 3.0400000000E+00
 $f_{[37]}$: 3.1704000000E+00 $f_{[38]}$: 3.3056000000E+00 $f_{[39]}$: 3.4456000000E+00
 $f_{[40]}$: 3.5904000000E+00 $f_{[41]}$: 3.7400000000E+00 $f_{[42]}$: 3.8944000000E+00
 $f_{[43]}$: 4.0536000000E+00 $f_{[44]}$: 4.2176000000E+00 $f_{[45]}$: 4.3864000000E+00
 $f_{[46]}$: 4.5600000000E+00 $f_{[47]}$: 4.7384000000E+00 $f_{[48]}$: 4.9216000000E+00
 $f_{[49]}$: 5.1096000000E+00 $f_{[50]}$: 5.3024000000E+00 $f_{[51]}$: 5.5000000000E+00

I valori della *conducibilità di riferimento* (ottenuti come appena spiegato) sono:

$t_{[1,2]}$: 1.2402000000E+00 $t_{[2,3]}$: 1.2209924528E+00 $t_{[3,4]}$: 1.2025854545E+00
 $t_{[4,5]}$: 1.1849789474E+00 $t_{[5,6]}$: 1.1681728814E+00 $t_{[6,7]}$: 1.1521672131E+00
 $t_{[7,8]}$: 1.1369619048E+00 $t_{[8,9]}$: 1.1225569231E+00 $t_{[9,10]}$: 1.1089522388E+00
 $t_{[10,11]}$: 1.0961478261E+00 $t_{[11,12]}$: 1.0841436620E+00 $t_{[12,13]}$: 1.0729397260E+00
 $t_{[13,14]}$: 1.0625360000E+00 $t_{[14,15]}$: 1.0529324675E+00 $t_{[15,16]}$: 1.0441291139E+00

C.3.3 - Procedura Conducibilità

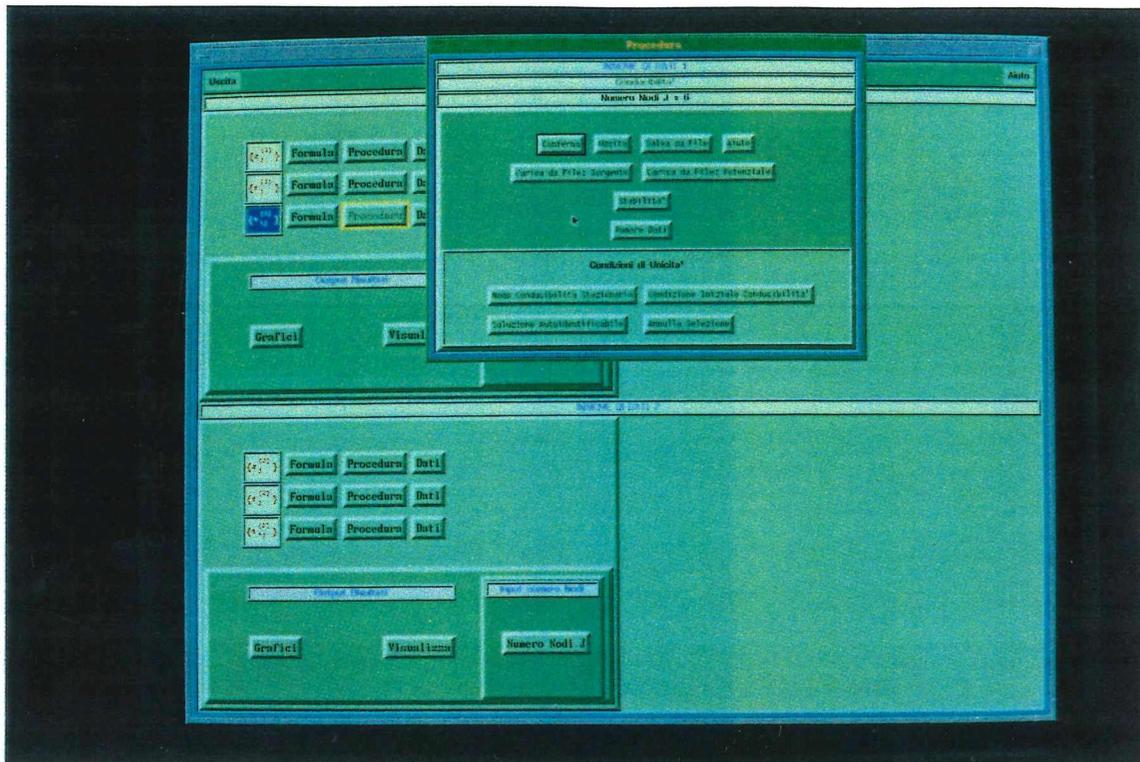


Fig. C.10 - Bottoniera per attivare *Procedura* conducibilità

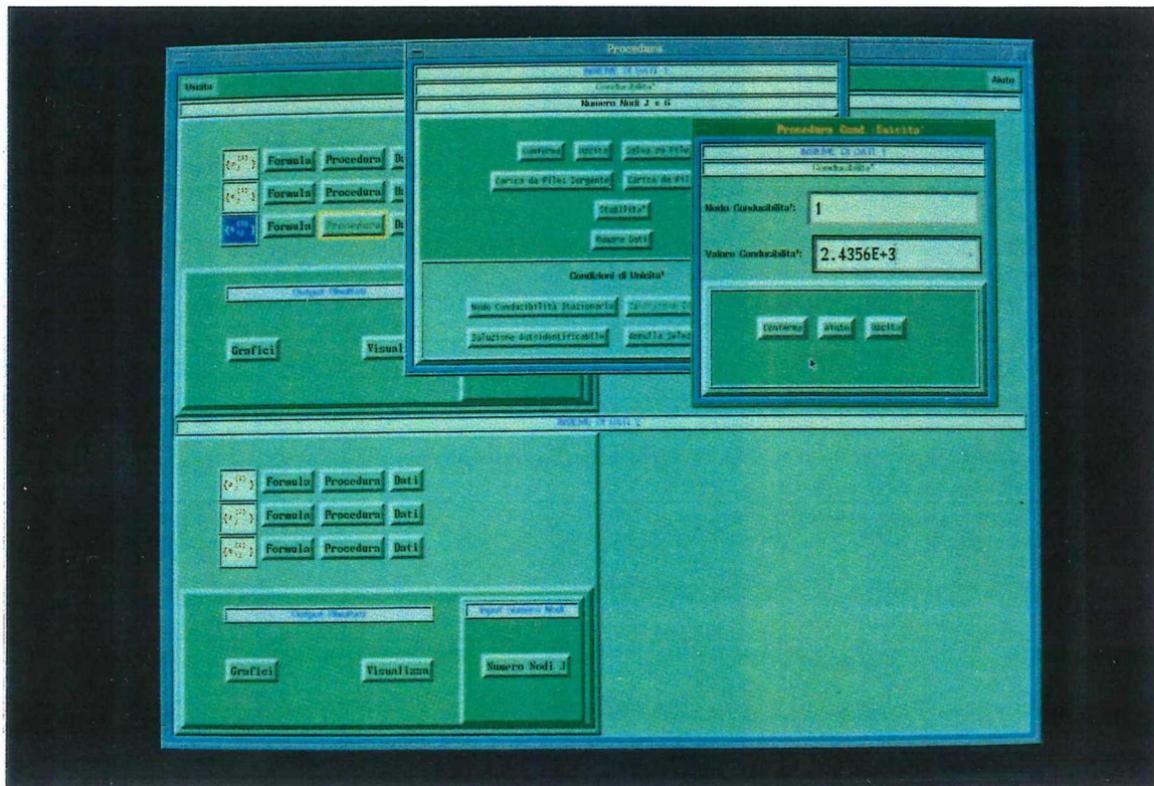


Fig. C.11 - Finestra per l'introduzione valore noto conducibilità

Esempio 3, PBM, 2

$t_{[16,17]}$: 1.0361259259E+00 $t_{[17,18]}$: 1.0289228916E+00 $t_{[18,19]}$: 1.0225200000E+00
 $t_{[19,20]}$: 1.0169172414E+00 $t_{[20,21]}$: 1.0121146067E+00 $t_{[21,22]}$: 1.0081120879E+00
 $t_{[22,23]}$: 1.0049096774E+00 $t_{[23,24]}$: 1.0025073684E+00 $t_{[24,25]}$: 1.0009051546E+00
 $t_{[25,26]}$: 1.0001030303E+00 $t_{[26,27]}$: 1.0001009901E+00 $t_{[27,28]}$: 1.0008990291E+00
 $t_{[28,29]}$: 1.0024971429E+00 $t_{[29,30]}$: 1.0048953271E+00 $t_{[30,31]}$: 1.0080935780E+00
 $t_{[31,32]}$: 1.0120918919E+00 $t_{[32,33]}$: 1.0168902655E+00 $t_{[33,34]}$: 1.0224886957E+00
 $t_{[34,35]}$: 1.0288871795E+00 $t_{[35,36]}$: 1.0360857143E+00 $t_{[36,37]}$: 1.0440842975E+00
 $t_{[37,38]}$: 1.0528829268E+00 $t_{[38,39]}$: 1.0624816000E+00 $t_{[39,40]}$: 1.0728803150E+00
 $t_{[40,41]}$: 1.0840790698E+00 $t_{[41,42]}$: 1.0960778626E+00 $t_{[42,43]}$: 1.1088766917E+00
 $t_{[43,44]}$: 1.1224755556E+00 $t_{[44,45]}$: 1.1368744526E+00 $t_{[45,46]}$: 1.1520733813E+00
 $t_{[46,47]}$: 1.1680723404E+00 $t_{[47,48]}$: 1.1848713287E+00 $t_{[48,49]}$: 1.2024703448E+00
 $t_{[49,50]}$: 1.2208693878E+00 $t_{[50,51]}$: 1.2400684564E+00

Esempio 3, segue

B) Secondo problemaIl dominio è $D = (0, 1)$.Potenziale: $v(x) = (1 + \varepsilon)(x^2 + x)$ *pot 5/2*Sorgente: $f(x) = 6x^2 - 2x + (3/2)$ *sor 5/2*

Il potenziale in questo esempio viene "perturbato" mediante il parametro ε . Il termine di sorgente deve essere lo stesso nei due problemi per poter applicare le formule di stabilità.

La *conducibilità* ottenuta per questo problema è:

$$b(x) = \frac{(2x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x) + \frac{5(1 + \varepsilon)}{4}}{(1 + \varepsilon)(2x + 1)}$$

Osservazione:Manifestamente si ha $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b = t$.

- ✓ Il numero di nodi è $J = 51$.
- ✓ I valori del *potenziale perturbato* con $\varepsilon = 0.5$ sono:

```

z_[1]: 0.0000000000E+00 z_[2]: 3.0600000000E-02 z_[3]: 6.2400000000E-02
z_[4]: 9.5400000000E-02 z_[5]: 1.2960000000E-01 z_[6]: 1.6500000000E-01
z_[7]: 2.0160000000E-01 z_[8]: 2.3940000000E-01 z_[9]: 2.7840000000E-01
z_[10]: 3.1860000000E-01 z_[11]: 3.6000000000E-01 z_[12]: 4.0260000000E-01
z_[13]: 4.4640000000E-01 z_[14]: 4.9140000000E-01 z_[15]: 5.3760000000E-01
z_[16]: 5.8500000000E-01 z_[17]: 6.3360000000E-01 z_[18]: 6.8340000000E-01
z_[19]: 7.3440000000E-01 z_[20]: 7.8660000000E-01 z_[21]: 8.4000000000E-01
z_[22]: 8.9460000000E-01 z_[23]: 9.5040000000E-01 z_[24]: 1.0074000000E+00
z_[25]: 1.0656000000E+00 z_[26]: 1.1250000000E+00 z_[27]: 1.1856000000E+00
z_[28]: 1.2474000000E+00 z_[29]: 1.3104000000E+00 z_[30]: 1.3746000000E+00
z_[31]: 1.4400000000E+00 z_[32]: 1.5066000000E+00 z_[33]: 1.5744000000E+00
z_[34]: 1.6434000000E+00 z_[35]: 1.7136000000E+00 z_[36]: 1.7850000000E+00
z_[37]: 1.8576000000E+00 z_[38]: 1.9314000000E+00 z_[39]: 2.0064000000E+00
z_[40]: 2.0826000000E+00 z_[41]: 2.1600000000E+00 z_[42]: 2.2386000000E+00
z_[43]: 2.3184000000E+00 z_[44]: 2.3994000000E+00 z_[45]: 2.4816000000E+00
z_[46]: 2.5650000000E+00 z_[47]: 2.6496000000E+00 z_[48]: 2.7354000000E+00
z_[49]: 2.8224000000E+00 z_[50]: 2.9106000000E+00 z_[51]: 3.0000000000E+00

```

La *conducibilità* si ottiene mediante la stessa condizione di unicità utilizzata per il problema di riferimento. I valori sono:

```

t_[1,2]: 1.2402000000E+00 t_[2,3]: 1.2117949686E+00 t_[3,4]: 1.1850581818E+00
t_[4,5]: 1.1598701754E+00 t_[5,6]: 1.1361276836E+00 t_[6,7]: 1.1137409836E+00
t_[7,8]: 1.0926317460E+00 t_[8,9]: 1.0727312821E+00 t_[9,10]: 1.0539791045E+00
t_[10,11]: 1.0363217391E+00 t_[11,12]: 1.0197117371E+00 t_[12,13]: 1.0041068493E+00
t_[13,14]: 9.8946933333E-01 t_[14,15]: 9.7576536797E-01 t_[15,16]: 9.6296455696E-01
t_[16,17]: 9.5103950617E-01 t_[17,18]: 9.3996546185E-01 t_[18,19]: 9.2972000000E-01
t_[19,20]: 9.2028275862E-01 t_[20,21]: 9.1163520599E-01 t_[21,22]: 9.0376043956E-01
t_[22,23]: 8.9664301075E-01 t_[23,24]: 8.9026877193E-01 t_[24,25]: 8.8462474227E-01
t_[25,26]: 8.7969898990E-01 t_[26,27]: 8.7548052805E-01 t_[27,28]: 8.7195922330E-01
t_[28,29]: 8.6912571429E-01 t_[29,30]: 8.6697133956E-01 t_[30,31]: 8.6548807339E-01
t_[31,32]: 8.6466846847E-01 t_[32,33]: 8.6450560472E-01 t_[33,34]: 8.6499304348E-01
t_[34,35]: 8.6612478632E-01 t_[35,36]: 8.6789523810E-01 t_[36,37]: 8.7029917355E-01
t_[37,38]: 8.7333170732E-01 t_[38,39]: 8.7698826667E-01 t_[39,40]: 8.8126456693E-01
t_[40,41]: 8.8615658915E-01 t_[41,42]: 8.9166055980E-01 t_[42,43]: 8.9777293233E-01
t_[43,44]: 9.0449037037E-01 t_[44,45]: 9.1180973236E-01 t_[45,46]: 9.1972805755E-01
t_[46,47]: 9.2824255319E-01 t_[47,48]: 9.3735058275E-01 t_[48,49]: 9.4704965517E-01
t_[49,50]: 9.5733741497E-01 t_[50,51]: 9.6821163311E-01

```

Segue la stima di stabilità:

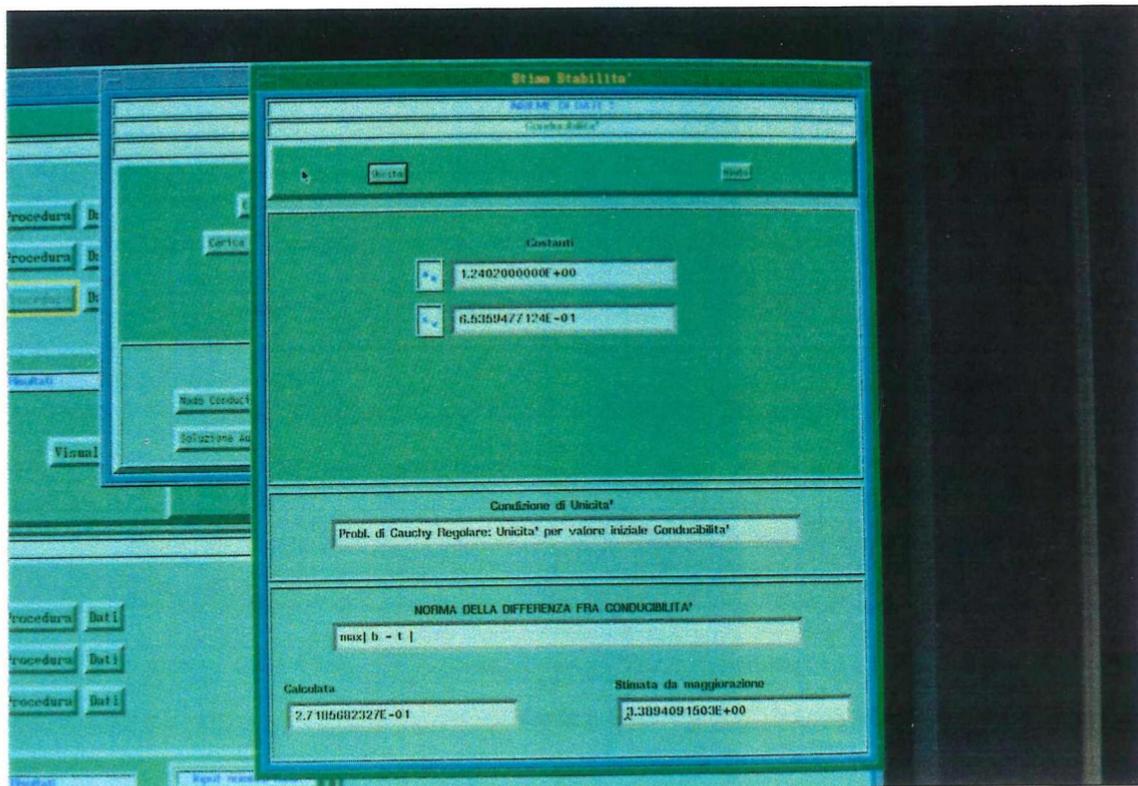


Fig. C.15 - Particolare Finestra Stabilità: caso Pr. di Cauchy reg. con valore noto conducibilità

Esempio 3, Pine

stima di stabilità

Si utilizza la formula (2.40) discretizzata.

Le costanti utilizzate nella maggiorazione sono:

- ✓ • $a_H = 1.240200000E+00$ (vedi eq. (2.66)).
- ✓ • $c_V = 6.5359477124E-01$ (vedi eq. (2.67.a)).

La norma definita dall'eq. (2.69) ha il seguente valore calcolato:

✓ $\| b - t \| \cong 2.7185682327E-01.$

Il valore che la maggiora secondo la disuguaglianza (2.40) è:

✓ $3.3894091503E+00.$

ATTENZIONE: i comandi di seguito istanziati riguardano altri esempi e devono essere perciò cambiati.

C.8.1 - Grafici Automatici

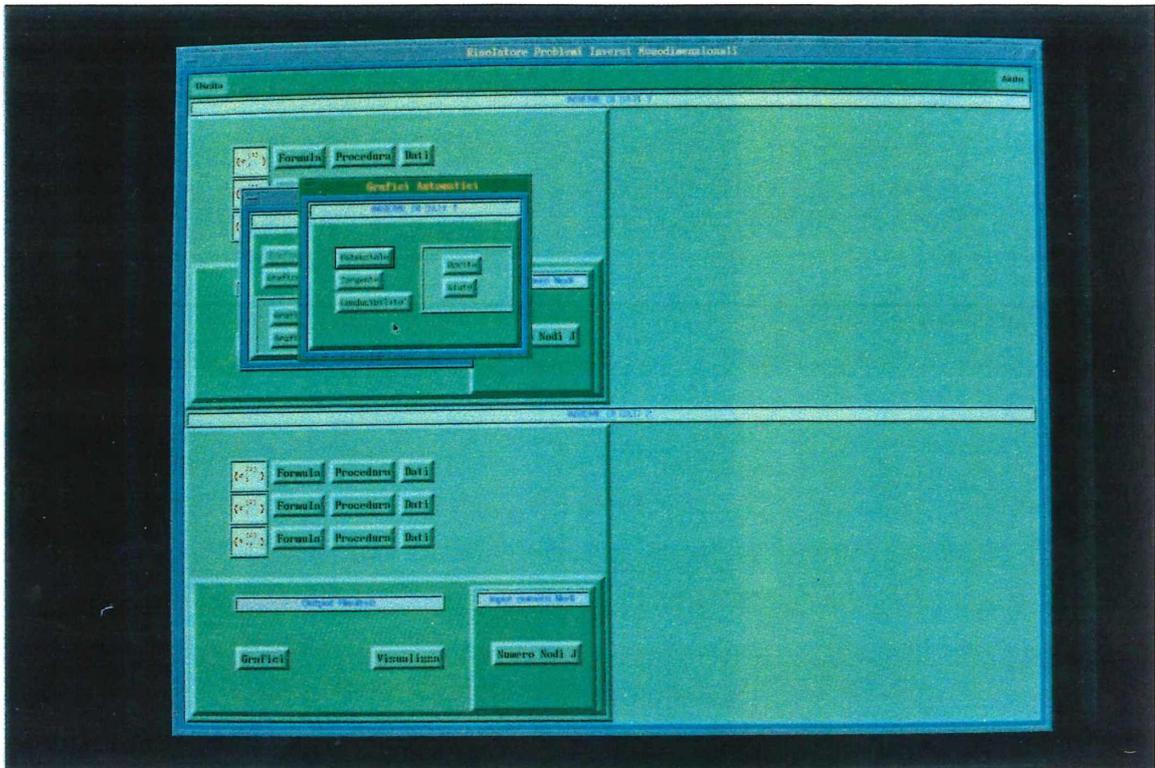


Fig. C.31 - Menù per attivare i Grafici automatici

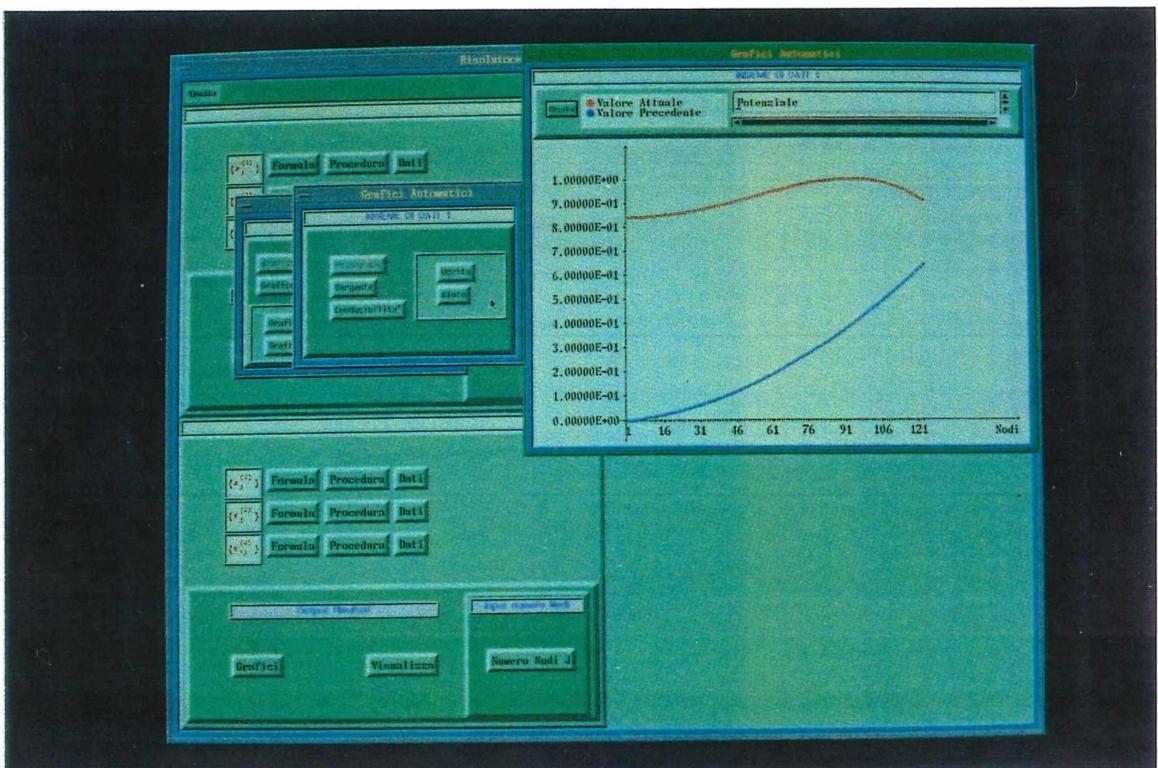


Fig. C.32 - Finestra grafici automatici: rosso - $\sin[\sin[1+j[j^2+1]]]$; blu - $(1/2)^{j^2} \cdot \sin(3)$ (100 nodi)

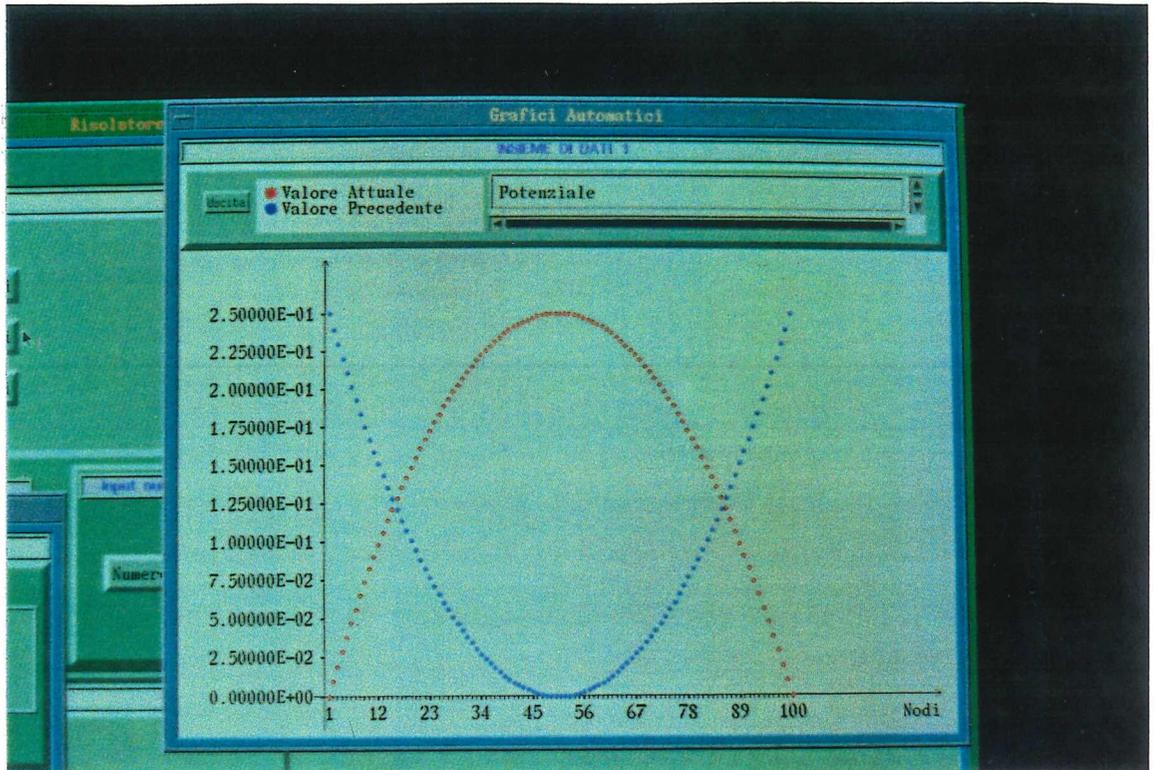


Fig. C.33 - Particolare Graf. Automatici : rosso - $(-1) \cdot (j-0.5)^2 + 0.25$, blu - $(j-0.5)^2 + 0.25$ (100 nodi)

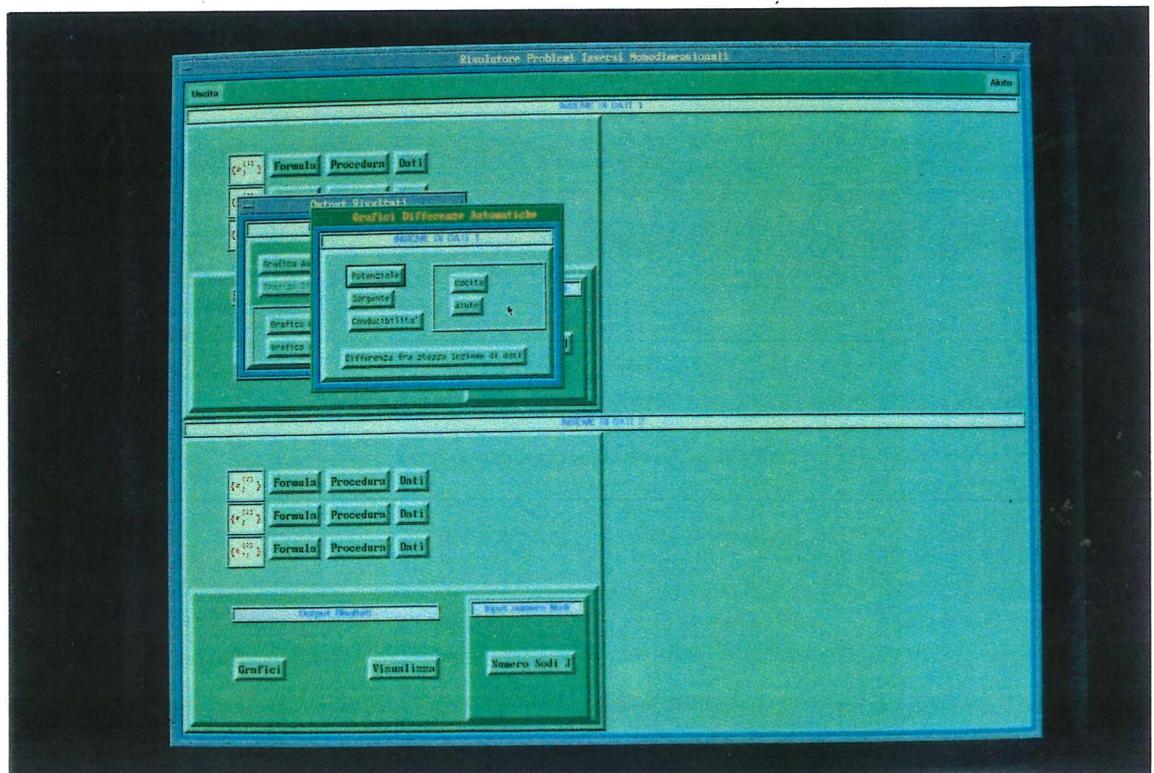


Fig. C.34 - Menù per attivare le differenze Automatiche

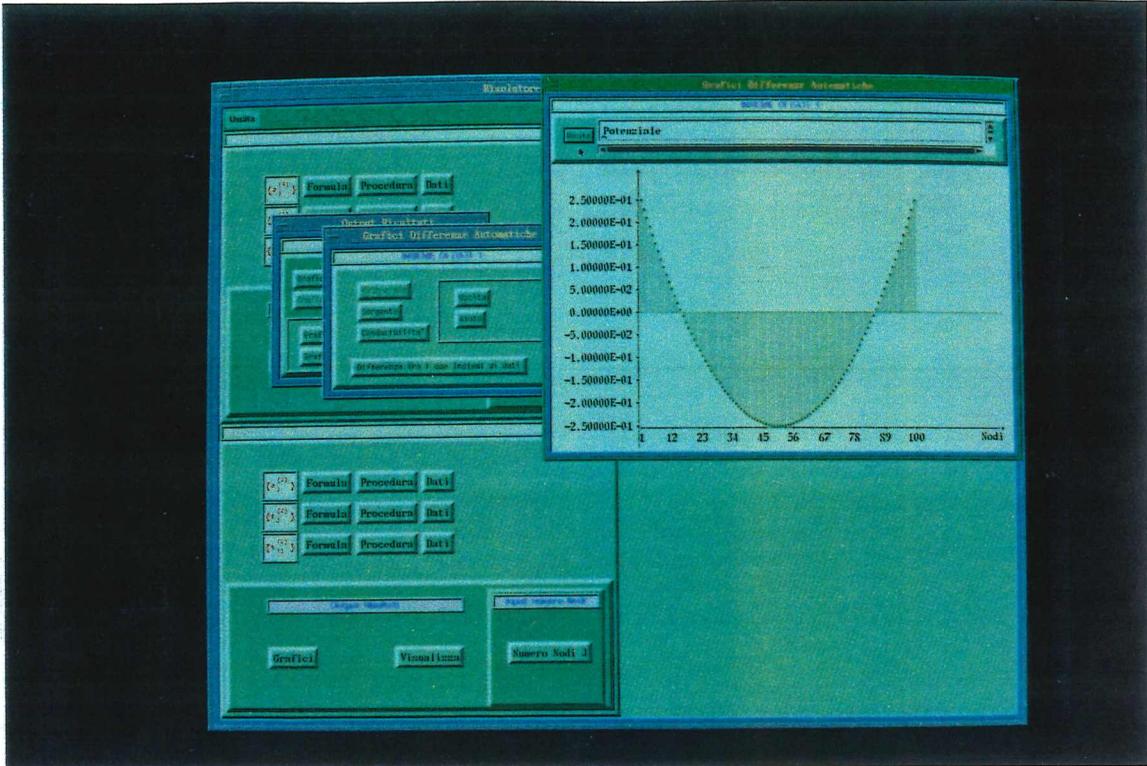


Fig. C.35 - Finestre Grafici Diff. automatiche: 1° Dataset $(j-0.5)^2$; 2° Dataset $(-1)*(j-0.5)^2+0.25$ (100 nodi)

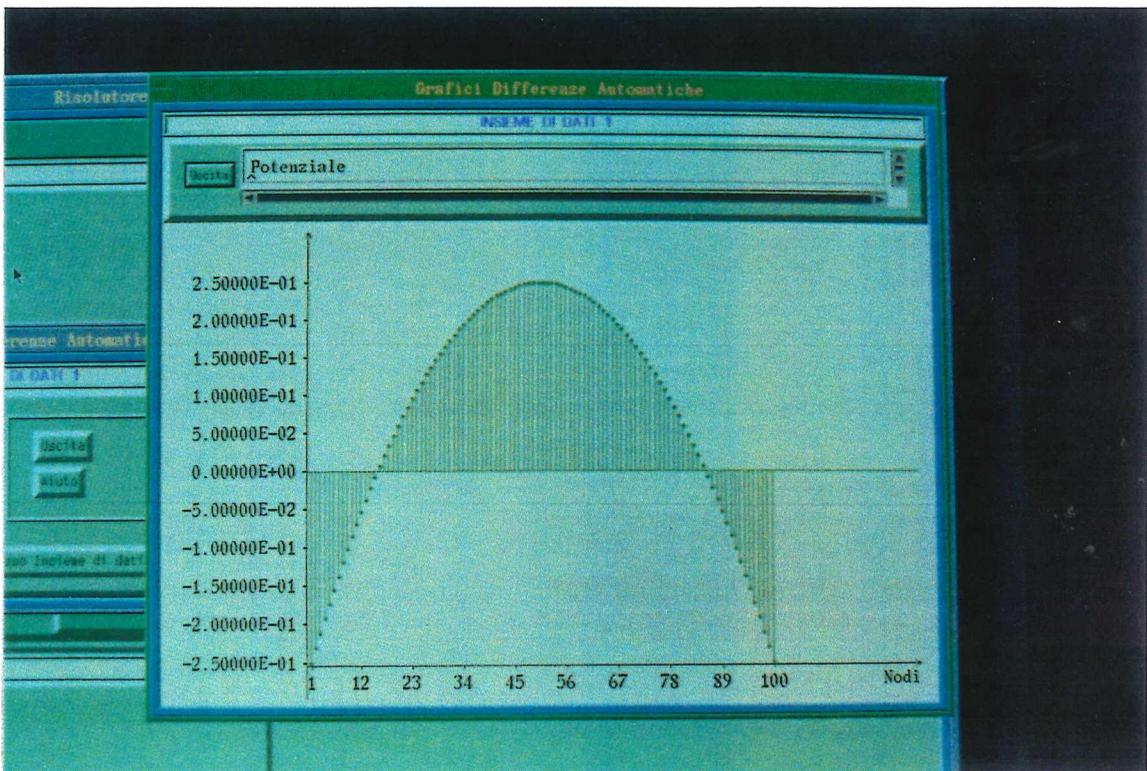


Fig. C.36 - Particolare finestra Grafici Differenze Automatiche

Per la grafica a comando manuale vedere Esempio 4.

Equazioni e disequazioni richieste dall'Esempio. Riferimenti minimi.

2.1.2 - STIME DI STABILITA'

Per ciascuna delle condizioni di unicità viste nel §.2.1.1. sussistono, sotto ulteriori ipotesi, le corrispondenti stime di stabilità.

2.1.2.1 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy regolari

Quando l' unicità è dovuta al dato di Cauchy fornito in un punto regolare, la stabilità viene stimata come segue.

Teorema 2.2:

Poniamo $z, v \in \mathcal{X}$ così che le condizioni espresse dalla (2.17) siano verificate. In più consideriamo che valgano i seguenti limiti uniformi

$$\left| \frac{1}{z'} \right|, \left| \frac{1}{v'} \right| \leq c_v ; \tag{ 2.39 }$$

Poniamo che t, B soddisfino le condizioni ^{$t \in A_{ad}$} (2.18) e ^{$b-t \in B_{ad}$} (2.19), rispettivamente. Allora si può applicare una stima uniforme a B:

$$\| B \|_{0, \infty} \leq (1 + 2 a_H) c_v \| V \|_{\mathcal{X}} , \tag{ 2.40 }$$

$(Bv')' = -(tv')'$; $Bv' = -tv' + c$; $e x_0$. $0 = -tv'|_t + c$ $e = tv'|_{x_0}$
 dove: $Bv' = -t(v' - v'|_{x_0})$; $B = - \frac{v' - v'|_{x_0}}{v'}$ t

$$\| V \|_{\mathcal{X}} = \max_D | V | + \| V_x \|_{0, \infty} \tag{ 2.41 }$$

$$\| B \|_{0, \infty} \leq 2a_H c_v \| v' \|_{0, \infty} \leq 2a_H c_v \| v \|_{\mathcal{X}}$$

L'esposizione seguirà lo stesso schema di quella del caso continuo.

Si noti che, per semplicità e con abuso di notazione, si utilizzeranno gli stessi simboli riguardo le costanti e le norme nel discreto di quelli utilizzati nel caso continuo anche se nel caso discreto si considerano spazi finito-dimensionali mentre nel caso continuo spazi infinito-dimensionali.

2.2.2.1 - Stime per soluzioni di problemi di Cauchy regolari

Quando l'unicità è dovuta al dato di Cauchy fornito in un punto regolare, la stima nel caso continuo è data dal **Teorema 2.2** il corrispettivo discreto comporta di sostituire alle norme che compaiono nella (2.40) le loro espressioni basate sui rapporti incrementali.

Più in dettaglio,

- La costante a_H è per definizione il massimo dei valori della soluzione di riferimento:

$$a_H = \max |t_{ij}| \quad \forall i,j \text{ con } 1 \leq i,j < J, \text{ con } i=j-1, \quad (2.66)$$

- La costante c_V invece dipende dalla condizione di unicità alla quale ogni stima fa riferimento. Qui vale la (2.39) dove alla grandezza v' nel caso discreto si sostituisce il rapporto incrementale

$$(v_{i+1} - v_i) / h_{i,i+1} \quad \forall i. \quad (2.67)$$

ottenendo

$$\max |h_{i,i+1} / (v_{i+1} - v_i)| \quad \forall i \text{ con } 1 \leq i < J \quad (2.67.a)$$

- la norma $\| V \|_{\mathcal{X}}$ nel continuo è formata da due addendi; il primo addendo $(\max | V |)$ fa sì che la $\| V \|_{\mathcal{X}}$ sia effettivamente una norma mentre il secondo addendo $(\| V \|_{L^\infty} = \| V' \|_{0, \infty})$ è una *seminorma* .

Ai fini di stimare la stabilità il termine $\max | V |$ può essere eliminato.

Quindi nel discreto si sostituisce a $\| V \|_{\mathcal{X}}$ la grandezza:

$$\max | (V_{i+1} - V_i) / h_{i,i+1} | \quad \forall i \ 1 \leq i \leq J \quad (2.68)$$

- Alla norma $\| B \|_{L^\infty} = \| B \|_{0, \infty}$ nel discreto si sostituisce

$$\max | (b_i - a_i) | \quad (2.69)$$

Il risultato del **Teorema 2.3** nel continuo (relativo ad unicità dovuta alla conoscenza di un punto stazionario della conducibilità) si discretizza come segue:

- le costanti a_H e c_V con quelle definite sopra.
- la costante c_A definita nel caso continuo dalla **(2.43)** è il massimo modulo della derivata prima della soluzione di riferimento, che pertanto diviene:

$$c_A = \max | (a_{i,i+1} - a_{i+1,i+2}) / h_{i,i+1} | \quad (2.70)$$

- la costante c_S definita dalla **(2.42)** è il massimo modulo della derivata seconda del potenziale v , che viene ora espressa da: